2017考研
扫一扫二维码，加入该群。

考研数学 66 条笔记

1、对于不等式 $x_n < y_n(n > N)$ 两边取极限时（以极限存在为前提），除不等号外还要带上等号，即 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n \le \lim\limits_{x\to\infty} y_n$。

2、对于任意数列 $\{a_n\}$，若满足 $|a_n - A| \le k|a_{n-1} - A|(n = 2,3....)$ 其中 $0 < k < 1$，则必有 $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = A$。这一结论在求解递归数列的极限时是很有用的。

3、设 $g(x)$ 在 $x = a$ 可导，$\varphi(x)$ 在 $x = a$ 连续而不可导，则 $g(x)\ \varphi(x)$ 在 $x = a$ 处

$$\begin{cases} \text{不可导} & \text{若} g(a) \ne 0 \\ \text{可导且导数为} g'(a)\varphi(a) & \text{若} g(a) = 0 \end{cases}$$

4、证明 $f'(x) + P(x)f(x) - Q(x)$ 在 (a,b) 存在零点，等价于证明 $u(x)[f'(x) + P(x)f(x) - Q(x)]$ 在 (a,b) 存在零点，其中 $u(x)$ 为 (a,b) 内任意恒正的函数。受求解一阶线性方程积分因子法的启示，取 $u(x) = e^{\int P(x)dx}$，$F(x) = e^{\int P(x)dx} f(x) - \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx$

5、曲率：$K = \left|\dfrac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}\right| = \dfrac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$

6、参数方程的重积分换元 $\begin{cases} x = F_1(r,s,t) \\ y = F_2(r,s,t) \\ z = F_3(r,s,t) \end{cases}$ $\quad dxdydz = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} = drdsdt$

7、若 $f(x)$ 以 T 为周期的周期函数，$f(x)$ 的全体原函数以 T 为周期的充要条件是 $\int_0^T f(t)dt = 0$

8、若 $f(x)$ 在区间 I 上有第一类间断点，则 $f(x)$ 在 I 上不存在原函数；若 $f(x)$ 在区间 I 上有第二类间断点，不确定 $f(x)$ 在 I 上存不存在原函数。

9、多元初等函数的偏导数仍是初等函数，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

10、 旋转面与柱面方程

命题 1：设空间曲线 Γ 的曲线参数方程为 $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$，则 Γ 绕 z 轴旋转

一周的曲面方程为：$\begin{cases} x=\sqrt{\varphi(x)^2+\psi(x)^2}cos\theta \\ y=\sqrt{\varphi(x)^2+\psi(x)^2}sin\theta \\ z=\omega(t) \end{cases}$

命题 2：准线方程为 Γ：$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 当母线的方向向量为 $s=\{l,m,n\}$ 则柱面方程

$f(x-\frac{l}{n}z, y-\frac{m}{n}z)=0$

命题 3：若准线方程是 Γ：$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t), t\in(\alpha,\beta) \\ z=h(t) \end{cases}$，母线的方向向量是 $s=\{l,m,n\}$，柱

面方程是 $\begin{cases} x=f(t)+lu \\ y=g(t)+mu \\ z=h(t)+nu \end{cases}$

11、 两个随机变量 X,Y，若 $X=aY+b$，则当 $a>0$ 时 $\rho_{XY}=1$；当 $a<0$ 时 $\rho_{XY}=-1$

12、 设 $f(x)$ 在 (a,b) 非负，$\forall[\alpha,\beta]\subset(a,b)$，$f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可积，又设

$x=a(或x=b)$ 是 $f(x)$ 的瑕点，且 $\lim\limits_{x\to a+0}(x-a)^p f(x)=l(或\lim\limits_{x\to b-0}(b-x)^p f(x)=l)$ 则

当 $p<1且0\le l<+\infty$时，瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛。

13、 实对称的矩阵的属于不同特征值的特征值向量正交

14、 正交的向量组必线性无关

15、 知道三边长求面积用“海伦公式” $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)p}, p=\frac{1}{2}(a+b+c)$

16、 $z=f(x,y,r)$ 条件“z 与 r 无关”，潜台词就是说 $\frac{\partial z}{\partial r}=0$

17、 $f(x,y)=g(x,y)$ 两边对 x，y 求偏导是相等的

18、 有 $z=f(x,y)$ 区域 D_{xy} 求极值（最值）用拉格朗日函数，求出 λ 若有两个，则分别算出后求其极（最）值大小

19、 秩为 1 的矩阵可以化为两个向量的积 $A=\alpha\alpha^T$，α 为 n 维列向量。并且 A 的自乘积 $A^2=aA$，a 为常数

20、 A 的行（列）向量相互垂直，且长度相同为 a，$B=\frac{1}{a}A$ 为正交矩阵

21、 $(A-E)(A+E)=(A+E)(A-E)$ 满足交换律

22、 $ABx=0$① $Bx=0$② 由于②的解必是方程组①的解。因此，R（②的解向量）≤R（①的解向量）

23、 求矩阵的 n 次幂可化为对角阵（可化为对角阵的矩阵）来求：$A\sim\Lambda\Rightarrow A^n=P\Lambda^nP^{-1}$

24、 矩阵 A 的正负惯性指数<u>不等于</u>主子式的正负个数

25、 时间 A、B 相互独立，A、B、$\bar{A}$、$\bar{B}$ 相互独立

26、 在使用公式 $P\{a<x<b\}=F(b)-F(a)$ 时，在这里{}中的不等式应该是左开右闭的

27、 是对称矩阵的特征向量相互正交，$Q^{-1}AQ=\Lambda$ 已知 Λ 求 A（已知 A 的一个特征向量）；先求出 A 的另外的特征向量（利用正交条件），求出 Q，然后求出 A

28、 对角阵左乘 A，$A=[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n],A\Lambda=A\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots\lambda_n\alpha_n)$

29、 对于连乘式的处理，可以将式子取对数，转换成和式进行分析

30、 E(X+Y)=E(X)+E(Y) X、Y 不作独立要求
E(XY)=E(X)E(Y) X、Y 必须独立 Cov（X，Y）=0

31、 ①矩阵 A 满足 f（A）=0，矩阵 A 的特征值由 $f(\lambda)=0$ 确定

② $f(\lambda)=0$ 解出来的 $\lambda=\lambda_i$ 只是确定了 λ 的取值范围，具体特征值是否有？有几个同样的特征值？还需要增加题目条件

32、 矩阵 $A_{m\times n}$，对于 A^TA 的特征值为非负：$(Ax)^TAx\geq0\Rightarrow x^TA^TAx\Rightarrow A^TA$正定或半正定，$\lambda\geq0$

33、 A 对应的线性无关特征向量的个数≤特征值的重数

34、 最大似然估计值不一定要求似然函数的导数为零，有可能似然函数是恒增或者是恒减的，那么根据定义域的范围来求解最大似然估计值

35、 初等矩阵均是可逆的，并且有这样的表示方法（要会写出初等矩阵的表示）：

$$E_{ij}^{-1}=E_{ij},E_i^{-1}(k)=E\left(\frac{1}{k}\right),E_{ij}^{-1}(k)=E(-k)$$

36、 两个极限反常积分审敛法：①反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx(a>0)$ 当 p>1 时收敛，当 p≤1

时发散

②反常积分$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$当 0<p<1 时收敛，当 p≥1 时发散

37、 $|\rho_{XY}|=1$的充分必要条件是存在常数 a、b 使$P\{Y=aX+b\}=1$

38、 证明一元函数 f（x）的极限不存在的一种方法：

若 $\exists x_n \to x_0, x_n \neq x_0, \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在或 $\exists x_n \to x_0, x_n \neq x_0, y_n \to x_0, y_n \neq x_0$ 使得

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在

39、 对于任意数列$\{a_n\}$，若满足$|a_n-A| \le k|a_{n-1}-A|$其中 0<k<1，则必有$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$

（求解递归数列的极限，数列不是单调的，先求 A，后证明存在）

40、 设$a_{n+1}=f(a_n)(n=1、2、3\cdots), a_n \in$区间I，若 f（x）在区间 I 单调上升，并且

$a_2>a_1(a_1>a_2)$，则$\{a_n\}$单调上升（单调递减）；若 f（x）在区间 I 单调递减，则$\{a_n\}$

不具有单调性（对于递归系列的复杂的数列，可以从递归函数入手，PS：先说明有界）

41、 证明两条曲线在某一点相切$M(x_0,y_0)$，先求交点，后求交点的导数相等/方向向量

相等

42、 “f（x）在$x=x_0$邻域二阶可导”换句话“f（x）在$x=x_0$处的导数二阶导数连续”

43、 一般的，设 f（x）在[a,b]连续，在（a,b）n 阶可导，$f^n(x)$在（a,b）无零点，则 f（x）在（a，b）至多有 n 个不同的根

44、 用泰勒公式的证明，关键在于选取展开点，一般来说已知条件给的点作为展开点，若已知条件给出 f(x)，f'(x)的特征，可选在 x 处展开

45、 注意用词：“某点二阶可导”说明二阶导数在其邻域内是连续的；“在某点存在二阶导数”说明在该店处是可导的，但是在其邻域内不一定可导

46、 周期函数的导数依然是以 T 为周期的周期函数，而周期函数的原函数可就不一定是周期函数。只有当$\int_0^T f(t)dt=0$时，f（x）的全体原函数为周期为 T 的周期函数

47、 求取不定积分原函数的时候有一种方法，叫做“分项积分”一般应用在同种类型的函数结构构成的分式中（裂项公式）

48、 两个矩阵相似可以推出A_1,A_2的特征值相同，两矩阵的特征值相同不能推出相似；

A_1,A_2特征值相等并且$R(\lambda E-A_1)=R(\lambda E-A_2)$可以得出结论“$A_1,A_2$相似”

49、 求$x\to+\infty$时的极限，通常以“抓大头”的办法，所谓“抓大头”就是取分子、分母中趋于$+\infty$最快的项（指数式>幂式>对数式）

50、 看清题目中的用字：“任意”一般来说范围很广，可以向要处理的式中带入特定的的值或表达式，向目标推导

51、 关于倒代换，设 m、n 分别为被积函数分子、分母关于（x±a）的最高次数，当 n-m ≥1 时，用到代换可能成功（设 x±a=1/t）

52、 $D(X+2Y)=0 \Rightarrow X+2Y=c(\text{常数}) \Rightarrow X=-2Y+c, \rho_{XY}=-1$

53、 $F_X(x)$ 为分布函数，考察 $x=a$ 点是否连续：$P\{X \le a\}-P\{X<a\}=0$ 则连续，否则不连续

54、 $\Gamma(r)=\int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}dx(r>0)$ 是参数 r 的函数，称为 Γ 函数，Γ 函数的一个重要性质为 $\Gamma(r+1)=r\Gamma(r)$，特别的 $\Gamma(n+1)=n!$

55、 $D(X)=D(\sum_i X_i) \xrightarrow{X_i\text{与}X_j\text{相互独立}} \sum_i D(X_i)$

$$D(X)=D(\sum_i X_i) \xrightarrow{X_i\text{与}X_j\text{不相互独立}} \sum_i D(X_i)+2\sum\sum_{i<j} Cov(X_i,X_j)$$

56、 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 则 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面？将 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 对角化，可以得到 $f=4y_2^2+9y_3^2=1$，f 表示椭圆柱面

57、 正交变换不改变向量长度

58、 矩阵 A 正定的必要条件 $a_{ii}>0(i=1,2,3\cdots n), |A|>0$，合同变换不改变矩阵的 特征值

59、 旋转曲面围成的平面的方向为右手螺旋定则所规定的

60、 已知 $y=y(x)$ 的曲线，与 x 轴围成图形的型心 $\overline{x},\overline{y}$

$$\overline{x}=\frac{\int_a^b dx\int_0^{y(x)} xdy}{\int_a^b ydx}=\frac{\int_a^b y(x)xdx}{\int_a^b ydx}$$

$$\overline{y}=\frac{\int_a^b dx\int_0^{y(x)} ydy}{\int_a^b ydx}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}$$

61、 对于 $F(x,y,z)=0$ 的隐函数的形式 $dS=\frac{\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}}{|F_y'|}dxdy$ 可以使得计算得到化简

62、 $f(x,y)$ 在公共点 M_0 处的法向量为 $(f_x',f_y')|_{M_0}=grandf(x,y)|_{M_0}$

63、 $(kA)^*=k^{n-1}A^*;(A^*)^*=|A|^{n-2}A;|A^*|=|A|^{n-1}$

64、 若 A 列满秩 $R(AB)=R(B)$，$R(A^TA)=R(A)$（2012 年数学一考过）

65、 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^q n}\begin{cases} q>1, & \text{收敛} \\ q\le 1, & \text{发散} \end{cases}$

66、 $\{X+Y\le 2x\}\subset\{X\le x\}\cup\{Y\le x\}$