



College Mathematics Guidance Series  
大学数学学习辅导丛书

# 高等数学 习题全解指南

下册 同济·第六版

同济大学数学系 编



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS



# 《高等数学》(第六版)下册习题全解

<b>第八章 空间解析几何与向量代数</b> .....	3
习题 8-1 向量及其线性运算 .....	3
习题 8-2 数量积 向量积 混合积 .....	7
习题 8-3 曲面及其方程 .....	10
习题 8-4 空间曲线及其方程 .....	13
习题 8-5 平面及其方程 .....	16
习题 8-6 空间直线及其方程 .....	19
总习题八 .....	25
<b>第九章 多元函数微分法及其应用</b> .....	34
习题 9-1 多元函数的基本概念 .....	34
习题 9-2 偏导数 .....	37
习题 9-3 全微分 .....	41
习题 9-4 多元复合函数的求导法则 .....	45
习题 9-5 隐函数的求导公式 .....	52
习题 9-6 多元函数微分学的几何应用 .....	58
习题 9-7 方向导数与梯度 .....	65
习题 9-8 多元函数的极值及其求法 .....	68
习题 9-9 二元函数的泰勒公式 .....	75
习题 9-10 最小二乘法 .....	77
总习题九 .....	79
<b>第十章 重积分</b> .....	89
习题 10-1 二重积分的概念与性质 .....	89
习题 10-2 二重积分的计算法 .....	92
习题 10-3 三重积分 .....	114
习题 10-4 重积分的应用 .....	126
习题 10-5 含参变量的积分 .....	136

总习题十 .....	140
<b>第十一章 曲线积分与曲面积分</b> .....	<b>153</b>
习题 11-1 对弧长的曲线积分 .....	153
习题 11-2 对坐标的曲线积分 .....	158
习题 11-3 格林公式及其应用 .....	163
习题 11-4 对面积的曲面积分 .....	173
习题 11-5 对坐标的曲面积分 .....	179
习题 11-6 高斯公式 * 通量与散度 .....	183
习题 11-7 斯托克斯公式 * 环流量与旋度 .....	187
总习题十一 .....	193
<b>第十二章 无穷级数</b> .....	<b>203</b>
习题 12-1 常数项级数的概念和性质 .....	203
习题 12-2 常数项级数的审敛法 .....	207
习题 12-3 幂级数 .....	211
习题 12-4 函数展开成幂级数 .....	214
习题 12-5 函数的幂级数展开式的应用 .....	219
* 习题 12-6 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质 .....	226
习题 12-7 傅里叶级数 .....	229
习题 12-8 一般周期函数的傅里叶级数 .....	235
总习题十二 .....	240



## 全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解

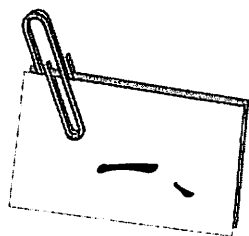
(五) 向量代数与空间解析几何 .....	253
(六) 多元函数微分学 .....	257
(七) 多元函数积分学 .....	270
(八) 无穷级数 .....	286



## 同济大学高等数学试卷选编

(一) 高等数学(下)期中考试试卷(I) .....	299
试题 .....	299
参考答案 .....	300

<b>(二) 高等数学(下)期中考试试卷(Ⅱ)</b> .....	303
试题 .....	303
参考答案 .....	304
<b>(三) 高等数学(下)期末考试试卷(Ⅰ)</b> .....	307
试题 .....	307
参考答案 .....	309
<b>(四) 高等数学(下)期末考试试卷(Ⅱ)</b> .....	313
试题 .....	313
参考答案 .....	314



**《高等数学》(第六版)**  
**下册习题全解**

# 第八章 空间解析几何与向量代数

## 习题 8-1 向量及其线性运算

1. 设  $u = a - b + 2c$ ,  $v = -a + 3b - c$ . 试用  $a, b, c$  表示  $2u - 3v$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } 2u - 3v &= 2(a - b + 2c) - 3(-a + 3b - c) \\ &= 5a - 11b + 7c.\end{aligned}$$

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分, 试用向量证明它是平行四边形.

证 如图 8-1, 设四边形  $ABCD$  中  $AC$  与  $BD$  交于点  $M$ , 已知  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$ ,  $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MB}$ . 故

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC}.$$

即  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$  且  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$ , 因此四边形  $ABCD$  是平行四边形.

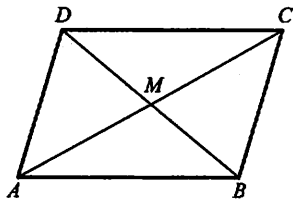


图 8-1

3. 把  $\triangle ABC$  的  $BC$  边五等分, 设分点依次为  $D_1, D_2, D_3, D_4$ , 再把各分点与点  $A$  连接. 试以  $\overrightarrow{AB} = c, \overrightarrow{BC} = a$  表示向量  $\overrightarrow{D_1A}, \overrightarrow{D_2A}, \overrightarrow{D_3A}$  和  $\overrightarrow{D_4A}$ .

证 如图 8-2, 根据题意知

$$\overrightarrow{BD_1} = \frac{1}{5}a, \overrightarrow{D_1D_2} = \frac{1}{5}a, \overrightarrow{D_2D_3} = \frac{1}{5}a, \overrightarrow{D_3D_4} = \frac{1}{5}a,$$

故

$$\overrightarrow{D_1A} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_1}) = -\frac{1}{5}a - c.$$

$$\overrightarrow{D_2A} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_2}) = -\frac{2}{5}a - c.$$

$$\overrightarrow{D_3A} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_3}) = -\frac{3}{5}a - c.$$

$$\overrightarrow{D_4A} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_4}) = -\frac{4}{5}a - c.$$

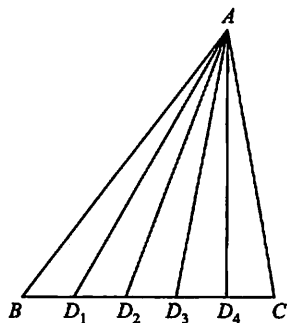


图 8-2

4. 已知两点  $M_1(0, 1, 2)$  和  $M_2(1, -1, 0)$ . 试用坐标表示式表示向量  $\overrightarrow{M_1M_2}$  及  $-2\overrightarrow{M_1M_2}$ .

$$\text{解 } \overrightarrow{M_1M_2} = (1-0, -1-1, 0-2) = (1, -2, -2).$$

$$-2\overrightarrow{M_1M_2} = -2(1, -2, -2) = (-2, 4, 4).$$



5. 求平行于向量  $a=(6,7,-6)$  的单位向量.

解 向量  $a$  的单位向量为  $\frac{a}{|a|}$ , 故平行于向量  $a$  的单位向量为

$$\pm \frac{a}{|a|} = \pm \frac{1}{11}(6, 7, -6) = \pm \left( \frac{6}{11}, \frac{7}{11}, \frac{-6}{11} \right),$$

其中  $|a| = \sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} = 11$ .

6. 在空间直角坐标系中, 指出下列各点在哪个卦限?

$A(1, -2, 3); B(2, 3, -4); C(2, -3, -4); D(-2, -3, 1)$ .

解  $A$  点在第四卦限,  $B$  点在第五卦限,  $C$  点在第八卦限,  $D$  点在第三卦限.

7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征? 指出下列各点的位置:

$A(3, 4, 0); B(0, 4, 3); C(3, 0, 0); D(0, -1, 0)$ .

解 在坐标面上的点的坐标, 其特征是表示坐标的三个有序数中至少有一个为零. 比如  $xOy$  面上的点的坐标为  $(x_0, y_0, 0)$ ,  $xOz$  面上的点的坐标为  $(x_0, 0, z_0)$ ,  $yOz$  面上的点的坐标为  $(0, y_0, z_0)$ .

在坐标轴上的点的坐标, 其特征是表示坐标的三个有序数中至少有两个为零, 比如  $Ox$  轴上的点的坐标为  $(x_0, 0, 0)$ ,  $Oy$  轴上的点的坐标为  $(0, y_0, 0)$ ,  $Oz$  轴上点的坐标为  $(0, 0, z_0)$ .

$A$  点在  $xOy$  面上,  $B$  点在  $yOz$  面上,  $C$  点在  $x$  轴上,  $D$  点在  $y$  轴上.

8. 求点  $(a, b, c)$  关于 (1) 各坐标面; (2) 各坐标轴; (3) 坐标原点的对称点的坐标.

解 (1) 点  $(a, b, c)$  关于  $xOy$  面的对称点为  $(a, b, -c)$ ; 关于  $yOz$  面的对称点是  $(-a, b, c)$ ; 关于  $zOx$  面的对称点为  $(a, -b, c)$ .

(2) 点  $(a, b, c)$  关于  $x$  轴的对称点是  $(a, -b, -c)$ ; 关于  $y$  轴的对称点是  $(-a, b, -c)$ ; 关于  $z$  轴的对称点是  $(-a, -b, c)$ .

(3) 点  $(a, b, c)$  关于坐标原点的对称点是  $(-a, -b, -c)$ .

9. 自点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  分别作各坐标面和各坐标轴的垂线, 写出各垂足的坐标.

解 设空间直角坐标系如图 8-3, 根据题意,  $P_0F$  为点  $P_0$  关于  $xOz$  面的垂线, 垂足点  $F$  坐标为  $(x_0, 0, z_0)$ ;  $P_0D$  为点  $P_0$  关于  $xOy$  面的垂线, 垂足点  $D$  坐标为  $(x_0, y_0, 0)$ ;  $P_0E$  为点  $P_0$  关于  $yOz$  面的垂线, 垂足点  $E$  坐标为  $(0, y_0, z_0)$ .

$P_0A$  为点  $P_0$  关于  $x$  轴的垂线, 垂足点  $A$  的坐标为  $(x_0, 0, 0)$ ;  $P_0B$  为点  $P_0$  关于  $y$  轴的垂线, 垂足点  $B$  的坐标为  $(0, y_0, 0)$ ;  $P_0C$  为点  $P_0$  关于  $z$  轴的垂线, 垂足点  $C$  的坐标为  $(0, 0, z_0)$ .

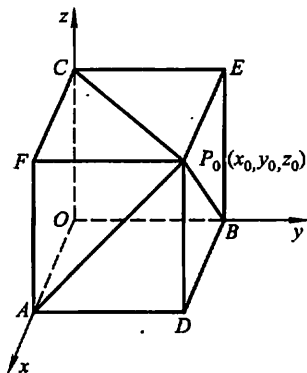


图 8-3

10. 过点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  分别作平行于  $z$  轴的直

线和平行于  $xOy$  面的平面,问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

解 如图 8-4,过  $P_0$  且平行于  $z$  轴的直线  $l$  上的点的坐标,其特点是:它们的横坐标与纵坐标均相同.

而过点  $P_0$  且平行于  $xOy$  面的平面  $\pi$  上的点的坐标,其特点是,它们的竖坐标  $z_0$  均相同.

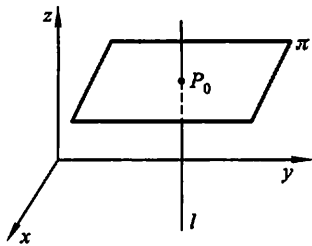


图 8-4

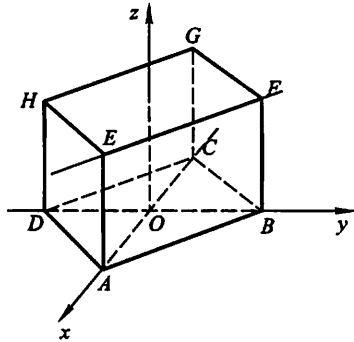


图 8-5

11. 一边长为  $a$  的立方体放置在  $xOy$  面上,其底面的中心在坐标原点,底面的顶点在  $x$  轴和  $y$  轴上,求它各顶点的坐标.

解 如图 8-5,已知  $AB=a$ ,故  $OA=OB=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ,于是各顶点的坐标分别为  $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right)$ ,  $B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right)$ ,  $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right)$ ,  $D\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right)$ ,  $E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right)$ ,  $F\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right)$ ,  $G\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right)$ ,  $H\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right)$ .

12. 求点  $M(4, -3, 5)$  到各坐标轴的距离.

解 点  $M$  到  $x$  轴的距离  $d_1 = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ , 点  $M$  到  $y$  轴的距离  $d_2 = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$ , 点  $M$  到  $z$  轴的距离  $d_3 = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$ .

13. 在  $yOz$  面上,求与三点  $A(3, 1, 2)$ ,  $B(4, -2, -2)$  和  $C(0, 5, 1)$  等距离的点.

解 所求点在  $yOz$  面上,不妨设为  $P(0, y, z)$ , 点  $P$  与三点  $A, B, C$  等距离,  $|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2}$ ,  $|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2}$ ,  $|\overrightarrow{PC}| = \sqrt{(y-5)^2 + (z-1)^2}$ .

由  $|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}|$  知

$$\sqrt{3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2} = \sqrt{(y-5)^2 + (z-1)^2},$$

即

$$\begin{cases} 9 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16 + (y+2)^2 + (z+2)^2, \\ 9 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2. \end{cases}$$



解上述方程组,得  $y=1, z=-2$ . 故所求点坐标为  $(0, 1, -2)$ .

14. 试证明以三点  $A(4, 1, 9), B(10, -1, 6), C(2, 4, 3)$  为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证 由  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = 7,$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = 7,$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

知  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$  及  $|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2$ . 故  $\triangle ABC$  为等腰直角三角形.

15. 设已知两点  $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$  和  $M_2(3, 0, 2)$ . 计算向量  $\overrightarrow{M_1M_2}$  的模、方向余弦和方向角.

解 向量  $\overrightarrow{M_1M_2} = (3-4, 0-\sqrt{2}, 2-1) = (-1, -\sqrt{2}, 1),$

其模  $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ . 其方向余弦分别为

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \gamma = \frac{1}{2}.$$

方向角分别为  $\alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{3}{4}\pi, \gamma = \frac{\pi}{3}$ .

16. 设向量的方向余弦分别满足 (1)  $\cos \alpha = 0$ ; (2)  $\cos \beta = 1$ ; (3)  $\cos \alpha = \cos \beta = 0$ , 问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

解 (1) 由  $\cos \alpha = 0$  知  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , 故向量与  $x$  轴垂直、平行于  $yOz$  面.

(2) 由  $\cos \beta = 1$  知  $\beta = 0$ , 故向量与  $y$  轴同向, 垂直于  $xOz$  面.

(3) 由  $\cos \alpha = \cos \beta = 0$  知  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ , 故向量垂直于  $x$  轴和  $y$  轴, 即与  $z$  轴平行. 垂直于  $xOy$  面.

17. 设向量  $r$  的模是 4, 它与轴  $u$  的夹角是  $60^\circ$ , 求  $r$  在轴  $u$  上的投影.

解 已知  $|r| = 4, \text{Prj}_u r = |r| \cos \theta = 4 \cdot \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$ .

18. 一向量的终点在点  $B(2, -1, 7)$ , 它在  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴上的投影依次为 4, -4 和 7. 求这向量的起点  $A$  的坐标.

解 设  $A$  点坐标为  $(x, y, z)$ , 则

$$\overrightarrow{AB} = (2-x, -1-y, 7-z),$$

由题意知

$$2-x=4, -1-y=-4, 7-z=7,$$

故  $x=-2, y=3, z=0$ , 因此  $A$  点坐标为  $(-2, 3, 0)$ .

19. 设  $m=3i+5j+8k, n=2i-4j-7k$  和  $p=5i+j-4k$ . 求向量  $a=4m+3n-p$  在  $x$  轴上的投影及在  $y$  轴上的分向量.

解  $a = 4m + 3n - p = 4(3i+5j+8k) + 3(2i-4j-7k) - (5i+j-4k)$   
 $= 13i + 7j + 15k,$

$a$  在  $x$  轴上的投影为 13, 在  $y$  轴上的分向量为  $7j$ .

### 习题 8-2

### 数量积 向量积 \* 混合积

1. 设  $a=3i-j-2k, b=i+2j-k$ , 求

(1)  $a \cdot b$  及  $a \times b$ ; (2)  $(-2a) \cdot 3b$  及  $a \times 2b$ ; (3)  $a, b$  的夹角的余弦.

解 (1)  $a \cdot b = (3, -1, -2) \cdot (1, 2, -1)$

$$= 3 \times 1 + (-1) \times 2 + (-2) \times (-1) = 3,$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (5, 1, 7).$$

(2)  $(-2a) \cdot 3b = -6(a \cdot b) = -6 \times 3 = -18,$

$$a \times 2b = 2(a \times b) = 2(5, 1, 7) = (10, 2, 14).$$

$$\begin{aligned} (3) \cos(\widehat{a, b}) &= \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}. \end{aligned}$$

2. 设  $a, b, c$  为单位向量, 且满足  $a+b+c=0$ , 求  $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$ .

解 已知  $|a|=|b|=|c|=1, a+b+c=0$ , 故  $(a+b+c) \cdot (a+b+c) = 0$ .

即  $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2a \cdot b + 2b \cdot c + 2c \cdot a = 0$ .

$$\text{因此 } a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2) = -\frac{3}{2}.$$

3. 已知  $M_1(1, -1, 2), M_2(3, 3, 1)$  和  $M_3(3, 1, 3)$ . 求与  $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}$  同时垂直的单位向量.

解  $\overrightarrow{M_1M_2} = (3-1, 3-(-1), 1-2) = (2, 4, -1),$

$$\overrightarrow{M_2M_3} = (3-3, 1-3, 3-1) = (0, -2, 2),$$

由于  $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3}$  与  $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}$  同时垂直, 故所求向量可取为

$$a = \frac{\pm(\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3})}{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3}|},$$

$$\text{由 } \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (6, -4, -4),$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_2M_3}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$\text{知 } a = \frac{\pm 1}{2\sqrt{17}}(6, -4, -4) = \pm \left( \frac{3}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}} \right).$$

4. 设质量为 100 kg 的物体从点  $M_1(3, 1, 8)$  沿直线移动到点  $M_2(1, 4, 2)$ , 计算重力所作的功(长度单位为 m, 重力方向为  $z$  轴负方向).

解  $\overrightarrow{M_1M_2} = (1-3, 4-1, 2-8) = (-2, 3, -6),$

$F = (0, 0, -100 \times 9.8) = (0, 0, -980),$

$W = F \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = (0, 0, -980) \cdot (-2, 3, -6) = 5880(\text{J}).$

5. 在杠杆上支点  $O$  的一侧与点  $O$  的距离为  $x_1$  的点  $P_1$  处, 有一与  $\overrightarrow{OP_1}$  成角  $\theta_1$  的力  $F_1$  作用着; 在  $O$  的另一侧与点  $O$  的距离为  $x_2$  的点  $P_2$  处, 有一与  $\overrightarrow{OP_2}$  成角  $\theta_2$  的力  $F_2$  作用着(图 8-6). 问  $\theta_1, \theta_2, x_1, x_2, |F_1|, |F_2|$  符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡?

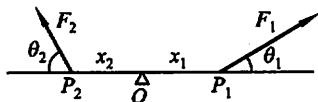


图 8-6

解 如图 8-6, 已知有固定转轴的物体的平衡条件是力矩的代数和为零, 又由对力矩正负符号的规定可得杠杆保持平衡的条件为

$$|F_1| x_1 \sin \theta_1 - |F_2| x_2 \sin \theta_2 = 0,$$

即

$$|F_1| x_1 \sin \theta_1 = |F_2| x_2 \sin \theta_2.$$

6. 求向量  $a = (4, -3, 4)$  在向量  $b = (2, 2, 1)$  上的投影.

解  $\text{Prj}_b a = \frac{a \cdot b}{|b|} = \frac{(4, -3, 4) \cdot (2, 2, 1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{6}{3} = 2.$

7. 设  $a = (3, 5, -2), b = (2, 1, 4)$ , 问  $\lambda$  与  $\mu$  有怎样的关系, 能使得  $\lambda a + \mu b$  与  $z$  轴垂直?

解  $\lambda a + \mu b = \lambda(3, 5, -2) + \mu(2, 1, 4) = (3\lambda + 2\mu, 5\lambda + \mu, -2\lambda + 4\mu).$

要  $\lambda a + \mu b$  与  $z$  轴垂直, 即要  $(\lambda a + \mu b) \perp (0, 0, 1)$ , 即

$$(\lambda a + \mu b) \cdot (0, 0, 1) = 0,$$

亦即

$$(3\lambda + 2\mu, 5\lambda + \mu, -2\lambda + 4\mu) \cdot (0, 0, 1) = 0,$$

故  $-2\lambda + 4\mu = 0$ , 因此当  $\lambda = 2\mu$  时能使  $\lambda a + \mu b$  与  $z$  轴垂直.

8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

证明 如图 8-7, 设  $AB$  是圆  $O$  的直径,  $C$  点在圆周

上, 要证  $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ . 只要证  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  即可.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BO} + |\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= -|\overrightarrow{AO}|^2 + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OC}|^2 = 0, \end{aligned}$$

故  $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$ ,  $\angle ACB$  为直角.

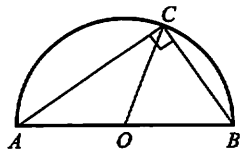


图 8-7

9. 已知向量  $a = 2i - 3j + k, b = i - j + 3k$  和  $c = i - 2j$ , 计算:

(1)  $(a \cdot b)c - (a \cdot c)b$ ; (2)  $(a + b) \times (b + c)$ ; (3)  $(a \times b) \cdot c$ .

解 (1)  $a \cdot b = (2, -3, 1) \cdot (1, -1, 3) = 8, a \cdot c = (2, -3, 1) \cdot (1, -2, 0) = 8,$

$$\text{故 } (a \cdot b)c - (a \cdot c)b = 8(1, -2, 0) - 8(1, -1, 3) = (0, -8, -24) \\ = -8j - 24k.$$

$$(2) \ a + b = (2, -3, 1) + (1, -1, 3) = (3, -4, 4), \\ b + c = (1, -1, 3) + (1, -2, 0) = (2, -3, 3),$$

$$(a+b) \times (b+c) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (0, -1, -1) = -j - k.$$

$$(3) \ (a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

10. 已知  $\overrightarrow{OA} = i + 3k$ ,  $\overrightarrow{OB} = j + 3k$ , 求  $\triangle OAB$  的面积.

解 由向量积的几何意义知

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|,$$

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-3, -3, 1),$$

$$|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 1} = \sqrt{19}.$$

故

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

11. 已知  $a = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $b = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $c = (c_x, c_y, c_z)$ ,  
试利用行列式的性质证明

$$(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b.$$

$$\text{证 因为 } (a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, (b \times c) \cdot a = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

$$(c \times a) \cdot b = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

$$\text{而由行列式的性质知 } \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

故

$$(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b.$$

12. 试用向量证明不等式:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geq |a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|,$$

其中  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  为任意实数. 并指出等号成立的条件.

证明 设向量  $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$ .

由  $a \cdot b = |a| |b| \cos(\widehat{a, b})$  知,  $|a \cdot b| = |a| |b| |\cos(\widehat{a, b})| \leq |a| |b|$ , 从而

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2},$$

当  $a_1, a_2, a_3$  与  $b_1, b_2, b_3$  成比例, 即  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$  时, 上述等式成立.

### 习题 8-3

### 曲面及其方程

1. 一动点与两定点  $(2, 3, 1)$  和  $(4, 5, 6)$  等距离, 求这动点的轨迹方程.

解 设动点为  $M(x, y, z)$ , 由题意知

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-6)^2},$$

经整理得  $4x + 4y + 10z - 63 = 0$ .

2. 建立以点  $(1, 3, -2)$  为球心, 且通过坐标原点的球面方程.

解 设以点  $(1, 3, -2)$  为球心,  $R$  为半径的球面方程为

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = R^2.$$

球面过原点, 故  $R^2 = (0-1)^2 + (0-3)^2 + (0+2)^2 = 14$ ,

从而所求球面方程为  $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 14$ .

3. 方程  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z = 0$  表示什么曲面?

解 将已知方程整理成

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = (\sqrt{6})^2,$$

所以此方程表示以  $(1, -2, -1)$  为球心, 以  $\sqrt{6}$  为半径的球面.

4. 求与坐标原点  $O$  及点  $(2, 3, 4)$  的距离之比为  $1:2$  的点的全体所组成的曲面的方程, 它表示怎样的曲面?

解 设动点坐标为  $(x, y, z)$ , 根据题意有

$$\frac{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2}} = \frac{1}{2},$$

化简整理得  $\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + (y+1)^2 + \left(z + \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{29}\right)^2$ .

它表示以  $\left(-\frac{2}{3}, -1, -\frac{4}{3}\right)$  为球心, 以  $\frac{2}{3}\sqrt{29}$  为半径的球面.

5. 将  $xOz$  坐标面上的抛物线  $z^2 = 5x$  绕  $x$  轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 以  $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$  代替抛物线方程  $z^2 = 5x$  中的  $z$ , 得

$$(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=5x,$$

即

$$y^2+z^2=5x.$$

注  $xOz$  面上的曲线  $F(x, z)=0$  绕  $x$  轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为  $F(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$ .

6. 将  $xOz$  坐标面上的圆  $x^2+z^2=9$  绕  $z$  轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 以  $\pm\sqrt{x^2+y^2}$  代替圆方程  $x^2+z^2=9$  中的  $x$ , 得

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=9,$$

即

$$x^2+y^2+z^2=9.$$

7. 将  $xOy$  坐标面上的双曲线  $4x^2-9y^2=36$  分别绕  $x$  轴及  $y$  轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 以  $\pm\sqrt{y^2+z^2}$  代替双曲线方程  $4x^2-9y^2=36$  中的  $y$ , 得该双曲线绕  $x$  轴旋转一周而生成的旋转曲面方程为

$$4x^2-9(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=36,$$

即

$$4x^2-9(y^2+z^2)=36.$$

以  $\pm\sqrt{x^2+z^2}$  代替双曲线方程  $4x^2-9y^2=36$  中的  $x$ , 得该双曲线绕  $y$  轴旋转一周而生成的旋转曲面方程为

$$4(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2-9y^2=36,$$

即

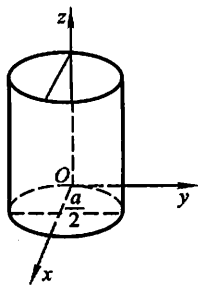
$$4(x^2+z^2)-9y^2=36.$$

8. 画出下列各方程所表示的曲面:

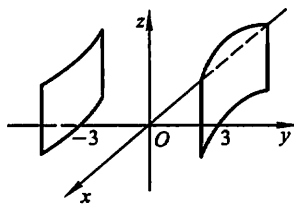
(1)  $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2$ ; (2)  $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ ;

(3)  $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ ; (4)  $y^2-z=0$ ; (5)  $z=2-x^2$ .

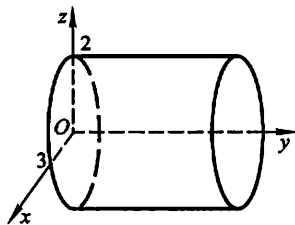
解 (1) 如图 8-8(1); (2) 如图 8-8(2); (3) 如图 8-8(3);  
(4) 如图 8-8(4); (5) 如图 8-8(5).



(1)



(2)



(3)

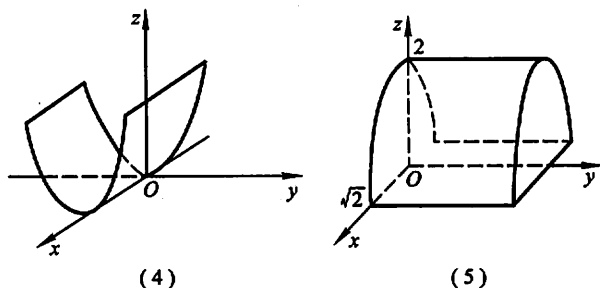


图 8-8

9. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形:

- (1)  $x=2$ ; (2)  $y=x+1$ ;  
 (3)  $x^2+y^2=4$ ; (4)  $x^2-y^2=1$ .

解 (1)  $x=2$  在平面解析几何中表示平行于  $y$  轴的一条直线, 在空间解析几何中表示与  $yOz$  面平行的平面.

(2)  $y=x+1$  在平面解析几何中表示斜率为 1,  $y$  轴截距也为 1 的一条直线, 在空间解析几何中表示平行于  $z$  轴的平面.

(3)  $x^2+y^2=4$  在平面解析几何中表示圆心在原点, 半径为 2 的圆, 在空间解析几何中表示母线平行于  $z$  轴, 准线为  $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=0 \end{cases}$  的圆柱面.

(4)  $x^2-y^2=1$  在平面解析几何中表示以  $x$  轴为实轴,  $y$  轴为虚轴的双曲线, 在空间解析几何中表示母线平行于  $z$  轴, 准线为  $\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ z=0 \end{cases}$  的双曲柱面.

10. 说明下列旋转曲面是怎样形成的:

- (1)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$ ; (2)  $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ ;  
 (3)  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ ; (4)  $(z-a)^2 = x^2 + y^2$ .

解 (1)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$  表示  $xOy$  面上的椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  绕  $x$  轴旋转一周而形成的旋转曲面, 或表示  $xOz$  面上的椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$  绕  $x$  轴旋转一周而形成的旋转曲面.

(2)  $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$  表示  $xOy$  面上双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$  绕  $y$  轴旋转一周而生成的旋转曲面, 或表示  $yOz$  面上双曲线  $-\frac{y^2}{4} + z^2 = 1$  绕  $y$  轴旋转一周而生成的旋转曲面.



(3)  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$  表示  $xOy$  面上双曲线  $x^2 - y^2 = 1$  绕  $x$  轴旋转一周而形成的旋转曲面, 或表示  $xOz$  面上双曲线  $x^2 - z^2 = 1$  绕  $x$  轴旋转一周而形成的旋转曲面.

(4)  $(z-a)^2 = x^2 + y^2$  表示  $xOz$  面上直线  $z = x + a$  或  $z = -x + a$  绕  $z$  轴旋转一周而形成的旋转曲面, 或表示  $yOz$  面上的直线  $z = y + a$  或  $z = -y + a$  绕  $z$  轴旋转一周而形成的旋转曲面.

11. 画出下列方程所表示的曲面:

(1)  $4x^2 + y^2 - z^2 = 4$ ;      (2)  $x^2 - y^2 - 4z^2 = 4$ ;      (3)  $\frac{z}{3} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ .

解 (1) 如图 8-9(1);      (2) 如图 8-9(2);      (3) 如图 8-9(3).

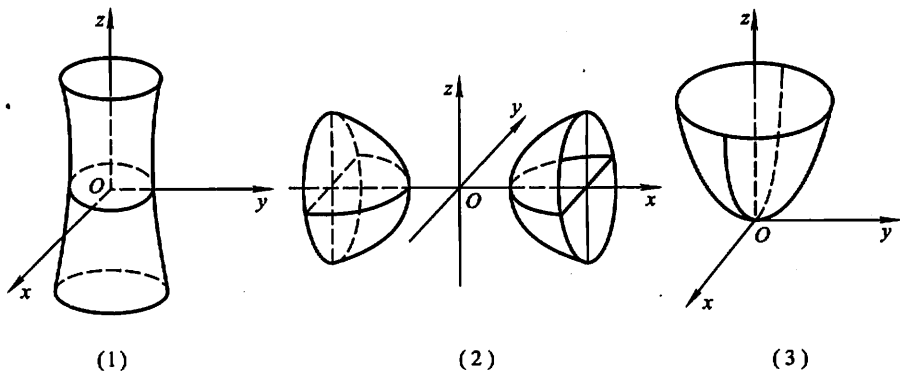


图 8-9

## 习题 8-4 空间曲线及其方程

1. 画出下列曲线在第一卦限内的图形:

(1)  $\begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases}$       (2)  $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ x-y=0; \end{cases}$       (3)  $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x^2+z^2=a^2. \end{cases}$

解 (1) 如图 8-10(1);      (2) 如图 8-10(2);      (3) 如图 8-10(3).

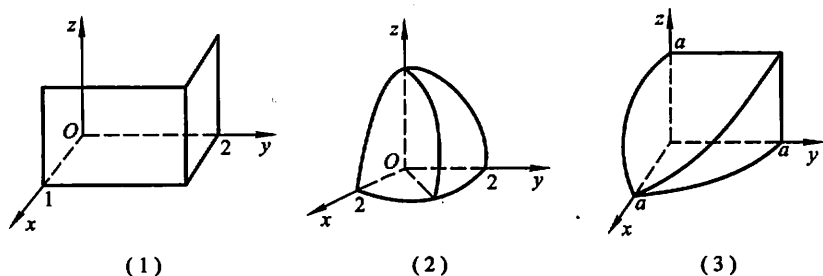


图 8-10

2. 指出下列方程组在平面解析几何中与在空间解析几何中分别表示什么图形:

$$(1) \begin{cases} y=5x+1, \\ y=2x-3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ y=3. \end{cases}$$

解 (1)  $\begin{cases} y=5x+1, \\ y=2x-3 \end{cases}$  在平面解析几何中表示两直线的交点, 在空间解析几何中表示两平面的交线即空间直线.

(2)  $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ y=3 \end{cases}$  在平面解析几何中表示椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  与其切线  $y=3$  的交点即切点. 在空间解析几何中表示椭圆柱面  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  与其切平面  $y=3$  的交线即空间直线.

3. 分别求母线平行于  $x$  轴及  $y$  轴而且通过曲线  $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$  的柱面方程.

解 在  $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$  中消去  $x$ , 得  $3y^2 - z^2 = 16$ ,  
即为母线平行于  $x$  轴且通过已知曲线的柱面方程.

在  $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$  中消去  $y$ , 得  $3x^2 + 2z^2 = 16$ ,  
即为母线平行于  $y$  轴且通过已知曲线的柱面方程.

4. 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  与平面  $x + z = 1$  的交线在  $xOy$  面上的投影的方程.

解 在  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x + z = 1 \end{cases}$  中消去  $z$ , 得  
 $x^2 + y^2 + (1-x)^2 = 9$ , 即  $2x^2 - 2x + y^2 = 8$ ,  
它表示母线平行于  $z$  轴的柱面, 故  $\begin{cases} 2x^2 - 2x + y^2 = 8, \\ z = 0 \end{cases}$  表示已知交线在  $xOy$  面上的投影的方程.

5. 将下列曲线的一般方程化为参数方程:

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ y = x; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4, \\ z = 0. \end{cases}$$

解 (1) 将  $y=x$  代入  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , 得  $2x^2 + z^2 = 9$ ,

取  $x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t$ , 则  $z = 3 \sin t$ , 从而可得该曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, \\ y = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \\ z = 3 \sin t \end{cases}$$

(2) 将  $z=0$  代入  $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$ , 得  $(x-1)^2 + y^2 = 3$ ,

取  $x-1 = \sqrt{3} \cos t$ , 则  $y = \sqrt{3} \sin t$ , 从而可得该曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \cos t, \\ y = \sqrt{3} \sin t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \\ z = 0 \end{cases}$$

6. 求螺旋线  $\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b\theta \end{cases}$  在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

解 由  $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$  得  $x^2 + y^2 = a^2$ , 故该螺旋线在  $xOy$  面上的投影曲线的直角坐标方程即为  $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = 0. \end{cases}$

由  $y = a \sin \theta, z = b\theta$  得  $y = a \sin \frac{z}{b}$ , 故该螺旋线在  $yOz$  面上的投影曲线的直角坐标方程即为  $\begin{cases} y = a \sin \frac{z}{b}, \\ x = 0. \end{cases}$

由  $x = a \cos \theta, z = b\theta$  得  $x = a \cos \frac{z}{b}$ , 故该螺旋线在  $xOz$  面上的投影曲线的直角坐标方程即为  $\begin{cases} x = a \cos \frac{z}{b}, \\ y = 0. \end{cases}$

7. 求上半球  $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  与圆柱体  $x^2 + y^2 \leq ax (a > 0)$  的公共部分在  $xOy$  面和  $xOz$  面上的投影.

解 如图 8-11. 所求立体在  $xOy$  面上的投影即为  $x^2 + y^2 \leq ax$ , 而由

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$$

得  $z = \sqrt{a^2 - ax}$ . 故所求立体在  $xOz$  平面上的投影为由  $x$  轴,  $z$  轴及曲线  $z = \sqrt{a^2 - ax}$  所围成的区域.

8. 求旋转抛物面  $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 4)$  在三坐标面上的投影.

解 联立  $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=4 \end{cases}$  得  $x^2+y^2=4$ .

故旋转抛物面在  $xOy$  面上的投影为  $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 4, \\ z=0. \end{cases}$

如图 8-12, 联立  $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x=0 \end{cases}$  得  $z=y^2$ , 故旋转抛物面在  $yOz$  面上的投影为由  $z=y^2$  及  $z=4$  所围成的区域.

同理, 联立  $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ y=0 \end{cases}$  得  $z=x^2$ .

故旋转抛物面在  $xOz$  面上的投影为由  $z=x^2$  及  $z=4$  所围成的区域.

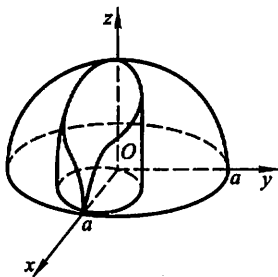


图 8-11

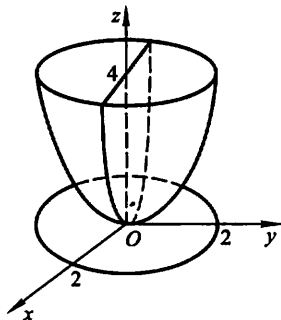


图 8-12

### 习题 8-5

### 平面及其方程

1. 求过点  $(3, 0, -1)$  且与平面  $3x-7y+5z-12=0$  平行的平面方程.

解 所求平面与已知平面  $3x-7y+5z-12=0$  平行. 因此所求平面的法向量可取为  $n=(3, -7, 5)$ , 设所求平面为

$$3x-7y+5z+D=0.$$

将点  $(3, 0, -1)$  代入上式得  $D=-4$ . 故所求平面方程为

$$3x-7y+5z-4=0.$$

2. 求过点  $M_0(2, 9, -6)$  且与连接坐标原点及点  $M_0$  的线段  $OM_0$  垂直的平面方程.

解  $\overrightarrow{OM_0}=(2, 9, -6)$ . 所求平面与  $\overrightarrow{OM_0}$  垂直, 可取  $n=\overrightarrow{OM_0}$ , 设所求平面方程为

$$2x+9y-6z+D=0.$$

将点  $M_0(2, 9, -6)$  代入上式, 得  $D=-121$ . 故所求平面方程为

$$2x+9y-6z-121=0.$$

3. 求过 $(1,1,-1)$ 、 $(-2,-2,2)$ 和 $(1,-1,2)$ 三点的平面方程.

解 由 
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -2-1 & -2-1 & 2+1 \\ 1-1 & -1-1 & 2+1 \end{vmatrix} = 0, \text{得 } x-3y-2z=0,$$

即为所求平面方程.

注 设  $M(x,y,z)$  为平面上任一点,  $M_i(x_i, y_i, z_i) (i=1,2,3)$  为平面上已知点. 由  $\overrightarrow{M_1M} \cdot (\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$ , 即

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

它就表示过已知三点  $M_i (i=1,2,3)$  的平面方程.

4. 指出下列各平面的特殊位置, 并画出各平面:

- (1)  $x=0$ ; (2)  $3y-1=0$ ;  
 (3)  $2x-3y-6=0$ ; (4)  $x-\sqrt{3}y=0$ ;  
 (5)  $y+z=1$ ; (6)  $x-2z=0$ ;  
 (7)  $6x+5y-z=0$ .

解 (1)–(7) 的平面分别如图 8-13(1)–(7).

(1)  $x=0$  表示  $yOz$  坐标面.

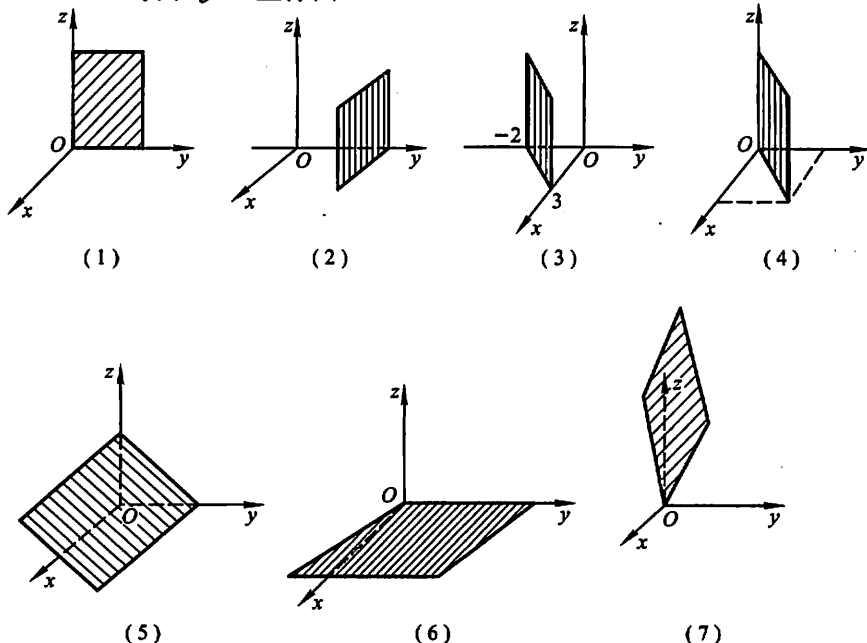


图 8-13

(2)  $3y-1=0$  表示过点  $(0, \frac{1}{3}, 0)$  与  $y$  轴垂直的平面.

(3)  $2x-3y-6=0$  表示与  $z$  轴平行的平面.

(4)  $x-\sqrt{3}y=0$  表示过  $z$  轴的平面.

(5)  $y+z=1$  表示平行于  $x$  轴的平面.

(6)  $x-2z=0$  表示过  $y$  轴的平面.

(7)  $6x+5y-z=0$  表示过原点的平面.

5. 求平面  $2x-2y+z+5=0$  与各坐标面的夹角的余弦.

解 平面的法向量为  $n=(2, -2, 1)$ . 设平面与三个坐标面  $xOy, yOz, zOx$  的夹角分别为  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ . 则根据平面的方向余弦知

$$\cos \theta_1 = \cos \gamma = \frac{n \cdot k}{|n| |k|} = \frac{(2, -2, 1) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot 1} = \frac{1}{3},$$

$$\cos \theta_2 = \cos \alpha = \frac{n \cdot i}{|n| |i|} = \frac{(2, -2, 1) \cdot (1, 0, 0)}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3},$$

$$\cos \theta_3 = \cos \beta = \frac{n \cdot j}{|n| |j|} = \frac{(2, -2, 1) \cdot (0, 1, 0)}{3 \cdot 1} = -\frac{2}{3}.$$

6. 一平面过点  $(1, 0, -1)$  且平行于向量  $a=(2, 1, 1)$  和  $b=(1, -1, 0)$ , 试求该平面方程.

解 所求平面平行于向量  $a$  和  $b$ , 可取平面的法向量

$$n = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, -3),$$

故所求平面为  $1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-0) - 3 \cdot (z+1) = 0$ ,

即  $x+y-3z-4=0$ .

7. 求三平面  $x+3y+z=1, 2x-y-z=0, -x+2y+2z=3$  的交点.

解 联立三平面方程

$$\begin{cases} x+3y+z=1, \\ 2x-y-z=0, \\ -x+2y+2z=3. \end{cases}$$

解此方程组得  $x=1, y=-1, z=3$ . 故所求交点为  $(1, -1, 3)$ .

8. 分别按下列条件求平面方程:

(1) 平行于  $xOz$  面且经过点  $(2, -5, 3)$ ;

(2) 通过  $z$  轴和点  $(-3, 1, -2)$ ;

(3) 平行于  $x$  轴且经过两点  $(4, 0, -2)$  和  $(5, 1, 7)$ .

解 (1) 所求平面平行于  $xOz$  面, 故设所求平面方程为  $By+D=0$ . 将点  $(2, -5, 3)$  代入, 得

$$-5B+D=0, \text{ 即 } D=5B.$$

因此, 所求平面方程为

$$By+5B=0, \text{ 即 } y+5=0.$$

(2) 所求平面过  $z$  轴. 故设所求平面方程为  $Ax+By=0$ . 将点  $(-3, 1, -2)$  代入, 得

$$-3A+B=0, \text{ 即 } B=3A.$$

因此, 所求平面方程为

$$Ax+3Ay=0, \text{ 即 } x+3y=0.$$

(3) 所求平面平行于  $x$  轴, 故设所求平面方程为  $By+Cz+D=0$ . 将点  $(4, 0, -2)$  及  $(5, 1, 7)$  代入方程得

$$-2C+D=0 \quad \text{及} \quad B+7C+D=0.$$

从而解得 
$$C=\frac{D}{2}, B=-\frac{9}{2}D.$$

因此, 所求平面方程为

$$-\frac{9}{2}Dy+\frac{D}{2}z+D=0,$$

即 
$$9y-z-2=0.$$

9. 求点  $(1, 2, 1)$  到平面  $x+2y+2z-10=0$  的距离.

解 利用点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  到平面  $Ax+By+Cz+D=0$  的距离公式

$$\begin{aligned} d &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|-3|}{3} = 1. \end{aligned}$$

## 习题 8-6

## 空间直线及其方程

1. 求过点  $(4, -1, 3)$  且平行于直线  $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$  的直线方程.

解 所求直线与已知直线平行, 故所求直线的方向向量  $s=(2, 1, 5)$ , 直线方程即为

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5}.$$

2. 求过两点  $M_1(3, -2, 1)$  和  $M_2(-1, 0, 2)$  的直线方程.

解 取所求直线的方向向量

$$s = \overrightarrow{M_1M_2} = (-1-3, 0-(-2), 2-1) = (-4, 2, 1),$$

因此所求直线方程为



$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

3. 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x-y+z=1, \\ 2x+y+z=4. \end{cases}$$

解 根据题意可知已知直线的方向向量

$$s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 3).$$

取  $x=0$ , 代入直线方程得  $\begin{cases} -y+z=1, \\ y+z=4. \end{cases}$  解得  $y=\frac{3}{2}, z=\frac{5}{2}$ . 这样就得到直线

经过的一点  $(0, \frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ . 因此直线的对称式方程为

$$\frac{x-0}{-2} = \frac{y-\frac{3}{2}}{1} = \frac{z-\frac{5}{2}}{3}.$$

参数方程为

$$\begin{cases} x = -2t, \\ y = \frac{3}{2} + t, \\ z = \frac{5}{2} + 3t. \end{cases}$$

注 由于所取的直线上的点可以不同, 因此所得到的直线对称式或参数方程的表达式也可以是不同的.

4. 求过点  $(2, 0, -3)$  且与直线

$$\begin{cases} x-2y+4z-7=0, \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$$

垂直的平面方程.

解 根据题意, 所求平面的法向量可取已知直线的方向向量, 即

$$n = s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (-16, 14, 11),$$

故所求平面方程为  $-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0$ .

即

$$16x-14y-11z-65=0.$$

5. 求直线  $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0, \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$  与直线  $\begin{cases} 2x+2y-z+23=0, \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$  的夹角的

余弦.

解 两已知直线的方向向量分别为

$$s_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (3, 4, -1), s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = (10, -5, 10),$$

因此,两直线的夹角的余弦

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \cos(\widehat{s_1, s_2}) = \frac{s_1 \cdot s_2}{|s_1| |s_2|} \\ &= \frac{3 \times 10 - 4 \times 5 - 1 \times 10}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-1)^2} \sqrt{10^2 + (-5)^2 + 10^2}} = 0.\end{aligned}$$

6. 证明直线  $\begin{cases} x+2y-z=7, \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$  与直线  $\begin{cases} 3x+6y-3z=8, \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$  平行.

证明 已知直线的方向向量分别是

$$s_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3, 1, 5), s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-9, -3, -15),$$

由  $s_2 = -3s_1$  知两直线互相平行.

7. 求过点  $(0, 2, 4)$  且与两平面  $x+2z=1$  和  $y-3z=2$  平行的直线方程.

解 所求直线与已知的两个平面平行. 因此所求直线的方向向量可取

$$s = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2, 3, 1),$$

故所求直线方程为

$$\frac{x-0}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{1}.$$

注 本题也可以这样解: 由于所求直线与已知的两个平面平行, 则可视所求直线是分别与已知平面平行的两平面的交线. 不妨设所求直线为

$$\begin{cases} x+2z=a, \\ y-3z=b. \end{cases}$$

将点  $(0, 2, 4)$  代入上式, 得  $a=8, b=-10$ . 故所求直线为

$$\begin{cases} x+2z=8, \\ y-3z=-10. \end{cases}$$

8. 求过点  $(3, 1, -2)$  且通过直线  $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$  的平面方程.

解 利用平面束方程, 过直线  $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$  的平面束方程为

$$\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\lambda\left(\frac{y+3}{2}-z\right)=0,$$

将点(3,1,-2)代入上式得  $\lambda=\frac{11}{20}$ .

因此所求平面方程为  $\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\frac{11}{20}\left(\frac{y+3}{2}-z\right)=0,$

即 
$$8x-9y-22z-59=0.$$

9. 求直线  $\begin{cases} x+y+3z=0, \\ x-y-z=0 \end{cases}$  与平面  $x-y-z+1=0$  的夹角.

解 已知直线的方向向量  $s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (2, 4, -2),$

平面的法向量  $n=(1, -1, -1)$ .

设直线与平面的夹角为  $\varphi$ , 则

$$\sin \varphi = |\cos(\widehat{n, s})| = \frac{|s \cdot n|}{|s| |n|} = \frac{|2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = 0,$$

即  $\varphi=0$ .

10. 试确定下列各组中的直线和平面间的关系:

(1)  $\frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z}{3}$  和  $4x-2y-2z=3;$

(2)  $\frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{7}$  和  $3x-2y+7z=8;$

(3)  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4}$  和  $x+y+z=3.$

解 设直线的方向向量为  $s$ , 平面的法向量为  $n$ , 直线与平面的夹角为  $\varphi$ , 且

$$\sin \varphi = |\cos(\widehat{n, s})| = \frac{|s \cdot n|}{|s| |n|}.$$

(1)  $s=(-2, -7, 3), n=(4, -2, -2),$

$$\sin \varphi = \frac{|(-2) \cdot 4 + (-7) \cdot (-2) + 3 \cdot (-2)|}{\sqrt{(-2)^2 + (-7)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 0,$$

即  $\varphi=0$ . 故直线平行于平面或在平面上, 现将直线上的点  $A(-3, -4, 0)$  代入平面方程, 方程不成立. 故点  $A$  不在平面上, 因此直线不在平面上, 直线与平面平行.

(2)  $s=(3, -2, 7), n=(3, -2, 7),$  由于  $s=n$  或

$$\sin \varphi = \frac{|3 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) + 7 \cdot 7|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 7^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 7^2}} = 1,$$

知  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , 故直线与平面垂直.

(3)  $s = (3, 1, -4)$ ,  $n = (1, 1, 1)$ , 由于  $s \cdot n = 0$  或

$$\sin \varphi = \frac{|3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = 0,$$

知  $\varphi = 0$ , 将直线上的点  $A(2, -2, 3)$  代入平面方程. 方程成立. 即点  $A$  在平面上. 故直线在平面上.

11. 求过点  $(1, 2, 1)$  而与两直线

$$\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} 2x-y+z=0, \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

平行的平面的方程.

解 两直线的方向向量为

$$s_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -3), s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, -1),$$

$$\text{取 } n = s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 1, -1),$$

则过点  $(1, 2, 1)$ , 以  $n$  为法向量的平面方程为

$$-1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-2) - 1 \cdot (z-1) = 0,$$

即  $x - y + z = 0$ .

12. 求点  $(-1, 2, 0)$  在平面  $x+2y-z+1=0$  上的投影.

解 作过已知点且与已知平面垂直的直线. 该直线与平面的交点即为所求. 根据题意, 过点  $(-1, 2, 0)$  与平面  $x+2y-z+1=0$  垂直的直线为

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-0}{-1},$$

将它化为参数方程  $x = -1+t, y = 2+2t, z = -t$ , 代入平面方程得

$$-1+t+2(2+2t)-(-t)+1=0,$$

整理得  $t = -\frac{2}{3}$ . 从而所求点  $(-1, 2, 0)$  在平面  $x+2y-z+1=0$  上的投影为  $(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ .

13. 求点  $P(3, -1, 2)$  到直线  $\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$  的距离.

$$\text{解 直线的方向向量 } s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -3, -3).$$

在直线上取点 $(1, -2, 0)$ , 这样, 直线的方程可表示成参数方程形式

$$x=1, y=-2-3t, z=-3t. \quad (1)$$

又, 过点  $P(3, -1, 2)$ , 以  $s=(0, -3, -3)$  为法向量的平面方程为

$$-3(y+1)-3(z-2)=0,$$

即

$$y+z-1=0. \quad (2)$$

将式(1)代入式(2)得  $t=-\frac{1}{2}$ , 于是直线与平面的交点为  $(1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ , 故

$$d=\sqrt{(3-1)^2+\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

14. 设  $M_0$  是直线  $l$  外一点,  $M$  是直线  $l$  上任意一点, 且直线的方向向量为  $s$ , 试证: 点  $M_0$  到直线  $l$  的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M} \times s|}{|s|}.$$

证 如图 8-14, 点  $M_0$  到直线  $l$  的距离为  $d$ . 由向量积的几何意义知  $|\overrightarrow{M_0M} \times s|$  表示以  $\overrightarrow{M_0M}$ ,  $s$  为邻边的平行四边形的面积. 而  $\frac{|\overrightarrow{M_0M} \times s|}{|s|}$  表示以  $|s|$  为边长的该平行四边形的高. 即为点  $M_0$  到直线  $l$  的距离. 于是

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M} \times s|}{|s|}.$$

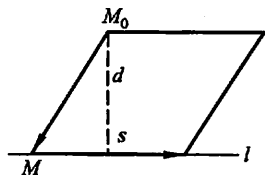


图 8-14

15. 求直线  $\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$  在平面  $4x-y+z=1$  上的投影直线的方程.

解 作过已知直线的平面束, 在该平面束中找出与已知平面垂直的平面, 该平面与已知平面的交线即为所求.

设过直线  $\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$  的平面束方程为

$$2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0,$$

经整理得  $(2+3\lambda)x+(-4-\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0$ .

由  $(2+3\lambda) \cdot 4 + (-4-\lambda) \cdot (-1) + (1-2\lambda) \cdot 1 = 0$ ,

得  $\lambda=-\frac{13}{11}$ . 代入平面束方程, 得

$$17x+31y-37z-117=0.$$

因此所求投影直线的方程为

$$\begin{cases} 17x+31y-37z-117=0, \\ 4x-y+z=1. \end{cases}$$

16. 画出下列各曲面所围成的立体的图形:

- (1)  $x=0, y=0, z=0, x=2, y=1, 3x+4y+2z-12=0$ ;  
 (2)  $x=0, z=0, x=1, y=2, z=\frac{y}{4}$ ;  
 (3)  $z=0, z=3, x-y=0, x-\sqrt{3}y=0, x^2+y^2=1$  (在第一卦限内);  
 (4)  $x=0, y=0, z=0, x^2+y^2=R^2, y^2+z^2=R^2$  (在第一卦限内).

解 (1) 如图 8-15(1); (2) 如图 8-15(2);

(3) 如图 8-15(3); (4) 如图 8-15(4).

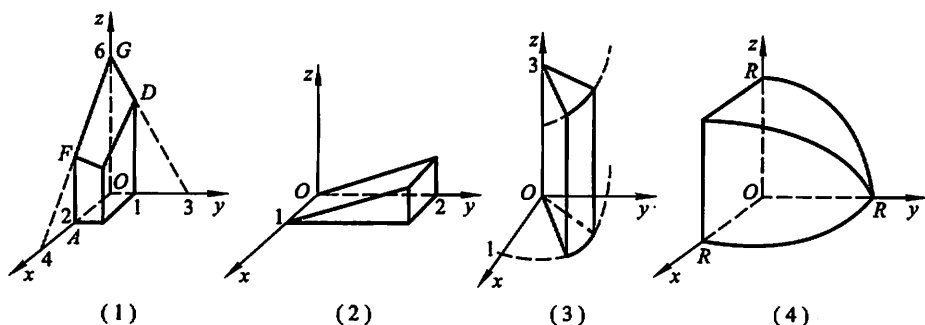


图 8-15

## 总习题八

### 1. 填空

(1) 设在坐标系  $[O; i, j, k]$  中点  $A$  和点  $M$  的坐标依次为  $(x_0, y_0, z_0)$  和  $(x, y, z)$ , 则在  $[A; i, j, k]$  坐标系中, 点  $M$  的坐标为 \_\_\_\_\_, 向量  $\overrightarrow{OM}$  的坐标为 \_\_\_\_\_.

(2) 设数  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  不全为 0, 使  $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$ , 则  $a, b, c$  三个向量是 \_\_\_\_\_ 的.

(3) 设  $a = (2, 1, 2), b = (4, -1, 10), c = b - \lambda a$ , 且  $a \perp c$ , 则  $\lambda =$  \_\_\_\_\_.

(4) 设  $|a| = 3, |b| = 4, |c| = 5$ , 且满足  $a + b + c = 0$ , 则  $|a \times b + b \times c + c \times a| =$  \_\_\_\_\_.

解 (1) 点  $M$  的坐标为  $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ , 向量  $\overrightarrow{OM}$  的坐标为  $(x - x_0 + x_0, y - y_0 + y_0, z - z_0 + z_0) = (x, y, z)$ .

(2) 由  $[(\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c) \times b] \cdot c = 0$  得  $(a \times b) \cdot c = 0$ . 即  $a \cdot b \cdot c$  共面.

(3)  $c = b - \lambda a = (4, -1, 10) - \lambda(2, 1, 2) = (4 - 2\lambda, -1 - \lambda, 10 - 2\lambda)$ .

$a \perp c$ , 故  $a \cdot c = (2, 1, 2) \cdot (4 - 2\lambda, -1 - \lambda, 10 - 2\lambda) = 27 - 9\lambda = 0$ , 从而  $\lambda = 3$ .

(4) 由  $(a + b + c) \times b = 0$  知  $a \times b + c \times b = 0$ , 即  $a \times b = b \times c$ ;

由  $(a + b + c) \times a = 0$  知  $b \times a + c \times a = 0$ , 即  $a \times b = c \times a$ .

又, 由  $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2$  知以向量  $a, b, c$  为边的三角形为直角三角形, 且  $a \perp b$ . 故

$$|a \times b + b \times c + c \times a| = 3|a \times b| = 3|a||b|\sin(\widehat{a, b}) \\ = 3 \times 3 \times 4 \times 1 = 36.$$

2. 在  $y$  轴上求与点  $A(1, -3, 7)$  和点  $B(5, 7, -5)$  等距离的点.

解 根据题意, 设所求点为  $M(0, y, 0)$ , 由

$$1^2 + (y+3)^2 + 7^2 = 5^2 + (y-7)^2 + (-5)^2$$

得  $y=2$ . 故所求点为  $M(0, 2, 0)$ .

3. 已知  $\triangle ABC$  的顶点为  $A(3, 2, -1)$ 、 $B(5, -4, 7)$  和  $C(-1, 1, 2)$ , 求从顶点  $C$  所引中线的长度.

解 设  $AB$  中点的坐标为  $(x_0, y_0, z_0)$ , 由

$$x_0 = \frac{3+5}{2} = 4, y_0 = \frac{2-4}{2} = -1, z_0 = \frac{7-1}{2} = 3,$$

从而顶点  $C$  所引中线的长度

$$d = \sqrt{(4+1)^2 + (-1-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{30}.$$

4. 设  $\triangle ABC$  的三边  $\overrightarrow{BC} = a$ 、 $\overrightarrow{CA} = b$ 、 $\overrightarrow{AB} = c$ , 三边中点依次为  $D$ 、 $E$ 、 $F$ , 试用向量  $a, b, c$  表示  $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{BE}$ 、 $\overrightarrow{CF}$ , 并证明

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0.$$

证明 如图 8-16,  $D, E, F$  分别为  $BC, CA, AB$  的中点, 因此

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{a}{2}, \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{b}{2}, \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{c}{2},$$

$$\text{从而 } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = c + \frac{a}{2},$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = a + \frac{b}{2},$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = b + \frac{c}{2},$$

$$\text{故 } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = c + \frac{a}{2} + a + \frac{b}{2} + b + \frac{c}{2} = \frac{3}{2}(a+b+c) = 0.$$

5. 试用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边, 且其长度等于第三边长度的一半.

证明 如图 8-17,  $D, E$  分别是  $CA$  与  $BC$  的中点.

$$\text{由 } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 2(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}) = 2\overrightarrow{DE}.$$

$$\text{知 } \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DE} \text{ 且 } |\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|.$$

即三角形两边中点的连线平行于第三边, 且长度等于第三边长度的一半.

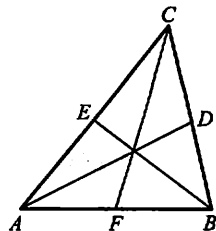


图 8-16

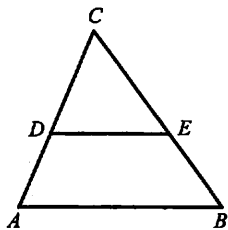


图 8-17



6. 设  $|a+b|=|a-b|$ ,  $a=(3, -5, 8)$ ,  $b=(-1, 1, z)$ , 求  $z$ .

解  $a+b=(3-1, -5+1, 8+z)=(2, -4, 8+z)$ ,

$a-b=(3-(-1), -5-1, 8-z)=(4, -6, 8-z)$ ,

由  $|a+b|=|a-b|$  知

$$\sqrt{2^2+(-4)^2+(8+z)^2}=\sqrt{4^2+(-6)^2+(8-z)^2},$$

经整理得  $z=1$ .

7. 设  $|a|=\sqrt{3}$ ,  $|b|=1$ ,  $(\widehat{a, b})=\frac{\pi}{6}$ , 求向量  $a+b$  与  $a-b$  的夹角.

解  $|a+b|^2=(a+b) \cdot (a+b)=|a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos(\widehat{a, b})$

$$=(\sqrt{3})^2+1^2+2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

$$=4+2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=7,$$

$|a-b|^2=(a-b) \cdot (a-b)=|a|^2+|b|^2-2|a||b|\cos(\widehat{a, b})$

$$=(\sqrt{3})^2+1^2-2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

$$=4-2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=1,$$

$$(a+b) \cdot (a-b)=|a|^2-|b|^2=3-1=2,$$

故  $\cos(\widehat{a+b, a-b})=\frac{(a+b) \cdot (a-b)}{|a+b||a-b|}=\frac{2}{\sqrt{7} \cdot 1}=\frac{2}{\sqrt{7}},$

所以  $(\widehat{a+b, a-b})=\arccos \frac{2}{\sqrt{7}}.$

8. 设  $a+3b \perp 7a-5b$ ,  $a-4b \perp 7a-2b$ , 求  $(\widehat{a, b})$ .

解 由  $a+3b \perp 7a-5b$  知  $(a+3b) \cdot (7a-5b)=0$ ,

由  $a-4b \perp 7a-2b$  知  $(a-4b) \cdot (7a-2b)=0$ ,

故  $7|a|^2+16a \cdot b-15|b|^2=0, \quad (1)$

$$7|a|^2-30a \cdot b+8|b|^2=0. \quad (2)$$

两式相减得  $46a \cdot b-23|b|^2$ , 即  $a \cdot b=\frac{1}{2}|b|^2$ , 代入(1)式得

$$|a|=|b|,$$

从而  $\cos(\widehat{a, b})=\frac{a \cdot b}{|a||b|}=\frac{a \cdot b}{|b|^2}=\frac{1}{2},$

所以  $(\widehat{a, b})=\frac{\pi}{3}.$

9. 设  $a=(2,-1,-2), b=(1,1,z)$ , 问  $z$  为何值时  $(\widehat{a,b})$  最小? 并求出此最小值.

$$\begin{aligned}\text{解 } \cos(\widehat{a,b}) &= \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{(2,-1,-2) \cdot (1,1,z)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2+z^2}} \\ &= \frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}.\end{aligned}$$

设  $f(z) = \frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}$ , 则

$$\begin{aligned}f'(z) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-2\sqrt{2+z^2} - (1-2z) \frac{z}{\sqrt{2+z^2}}}{2+z^2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-4-z}{(2+z^2)^{3/2}},\end{aligned}$$

令  $f'(z)=0$  得  $z=-4$ .

由于  $0 \leq (\widehat{a,b}) \leq \frac{\pi}{2}$  时,  $\cos(\widehat{a,b})$  为单调减少函数.  $f(z)$  取得最大值时,

$\theta = (\widehat{a,b})$  达到最小值.

经验证  $z=-4$  时,  $f(z)$  达到最大值, 此时  $\theta = (\widehat{a,b})$  达到最小值且由

$$\cos(\widehat{a,b})|_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 知 } \theta_{\min} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

10. 设  $|a|=4, |b|=3, (\widehat{a,b}) = \frac{\pi}{6}$ , 求以  $a+2b$  和  $a-3b$  为边的平行四边形的面积.

解 根据向量积的几何意义知以  $a+2b$  和  $a-3b$  为边的平行四边形的面积

$$\begin{aligned}S &= |(a+2b) \times (a-3b)| \\ &= 5|a \times b| = 5|a||b|\sin(\widehat{a,b}) \\ &= 5 \times 4 \times 3 \times \sin \frac{\pi}{6} = 5 \times 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 30.\end{aligned}$$

11. 设  $a=(2,-3,1), b=(1,-2,3), c=(2,1,2)$ , 向量  $r$  满足  $r \perp a, r \perp b$ ,  $\text{Prj}_c r = 14$ , 求  $r$ .

解 设向量  $r=(x,y,z)$ .

由  $r \perp a$  知  $r \cdot a = 0$ , 即  $2x-3y+z=0$ .

由  $r \perp b$  知  $r \cdot b = 0$ , 即  $x-2y+3z=0$ .

由  $\text{Prj}_c r = \frac{r \cdot c}{|c|} = 14$  知  $2x+y+2z=14|c|=14 \times 3=42$ ,

联立上述三个方程得  $x=14, y=10, z=2$ . 故  $r=(14, 10, 2)$ .

12. 设  $a=(-1, 3, 2), b=(2, -3, -4), c=(-3, 12, 6)$ , 证明三向量  $a, b, c$  共面, 并用  $a$  和  $b$  表示  $c$ .

证明 由  $(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0$  知  $[a \ b \ c] = 0$ , 故三个向量  $a, b, c$  共面.

$b, c$  共面.

设  $c = \lambda a + \mu b$ , 则

$$\begin{aligned} (-3, 12, 6) &= \lambda(-1, 3, 2) + \mu(2, -3, -4) \\ &= (-\lambda + 2\mu, 3\lambda - 3\mu, 2\lambda - 4\mu), \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} -\lambda + 2\mu = -3, \\ 3\lambda - 3\mu = 12, \\ 2\lambda - 4\mu = 6, \end{cases}$$

解得  $\lambda=5, \mu=1$ . 故

$$c=5a+b.$$

13. 已知动点  $M(x, y, z)$  到  $xOy$  平面的距离与点  $M$  到点  $(1, -1, 2)$  的距离相等, 求点  $M$  的轨迹的方程.

解 根据题意知

$$|z| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2},$$

即  $(x-1)^2 + (y+1)^2 - 4(z-1) = 0$  为点  $M$  的轨迹的方程.

14. 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴:

$$\begin{aligned} (1) \ z &= 2(x^2 + y^2); & (2) \ \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} &= 1; \\ (3) \ z^2 &= 3(x^2 + y^2); & (4) \ x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} &= 1. \end{aligned}$$

解 (1) 母线为  $\begin{cases} x=0, \\ z=2y^2, \end{cases}$  旋转轴为  $z$  轴.

(2) 母线为  $\begin{cases} x=0, \\ \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, \end{cases}$  旋转轴为  $y$  轴.

(3) 母线为  $\begin{cases} x=0, \\ z=\sqrt{3}y, \end{cases}$  旋转轴为  $z$  轴.

(4) 母线为  $\begin{cases} z=0, \\ x - \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases}$  旋转轴为  $x$  轴.

15. 求通过点  $A(3, 0, 0)$  和  $B(0, 0, 1)$  且与  $xOy$  面成  $\frac{\pi}{3}$  角的平面的方程.

解 设所求平面方程为  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ .

平面过点  $A(3, 0, 0), B(0, 0, 1)$ , 故  $a=3, c=1$ . 这样平面方程为

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{b} + z = 1.$$

它与  $xOy$  面成  $\frac{\pi}{3}$  角. 故

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{b}, 1\right) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + 1^2} \cdot 1},$$

即 
$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + 1 = 4, \frac{1}{b} = \pm \frac{\sqrt{26}}{3},$$

故所求平面为  $x + \sqrt{26}y + 3z = 3$  或  $x - \sqrt{26}y + 3z = 3$ .

16. 设一平面垂直于平面  $z=0$ , 并通过从点  $(1, -1, 1)$  到直线  $\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0 \end{cases}$  的垂线, 求此平面的方程.

解 直线  $\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0 \end{cases}$  的方向向量

$$s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -1, -1).$$

作过点  $(1, -1, 1)$  且以  $s=(0, -1, -1)$  为法向量的平面:

$$-1 \cdot (y+1) - (z-1) = 0, \text{ 即 } y+z=0,$$

联立  $\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0, \\ y+z=0 \end{cases}$  得垂足  $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

所求平面垂直于平面  $z=0$ . 设平面方程  $Ax+By+D=0$ . 平面过点  $(1, -1, 1)$  及垂足  $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , 故有

$$\begin{cases} A-B+D=0, \\ -\frac{1}{2}B+D=0, \end{cases}$$

由此解得  $B=2D, A=D$ . 因此所求平面方程为  $Dx+2Dy+D=0$ , 即

$$x+2y+1=0.$$

17. 求过点  $(-1, 0, 4)$ , 且平行于平面  $3x-4y+z-10=0$ , 又与直线  $\frac{x+1}{1} =$

$\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$  相交的直线的方程.

解 设所求直线方程

$$\frac{x+1}{m}=\frac{y-0}{n}=\frac{z-4}{p}.$$

所求直线平行于平面  $3x-4y+z-10=0$ , 故有

$$3m-4n+p=0, \quad (1)$$

又所求直线与直线  $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$  相交, 故有

$$\begin{vmatrix} -1-(-1) & 3-0 & 0-4 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{即} \quad 10m-4n-3p=0. \quad (2)$$

联立(1)、(2)式可得  $\frac{16}{m}=\frac{19}{n}=\frac{28}{p}.$

因此所求直线方程为  $\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}.$

注 若两直线  $l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$  相交, 则  $l_1$  与  $l_2$  必共面, 故  $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (s_1 \times s_2) = 0,$

$$\text{即有} \quad \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

18. 已知点  $A(1,0,0)$  及点  $B(0,2,1)$ , 试在  $z$  轴上求一点  $C$ , 使  $\triangle ABC$  的面积最小.

解 所求点位于  $z$  轴, 设其坐标为  $C(0,0,z)$ , 由向量的几何意义知

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|,$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0-1 & 2-0 & 1-0 \\ 0-1 & 0-0 & z-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix} \\ &= 2zi + (z-1)j + 2k, \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{(2z)^2 + (z-1)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{5z^2 - 2z + 5}.$$

设  $f(z) = 5z^2 - 2z + 5$ , 则由  $f'(z) = 10z - 2 = 0$  得  $z = \frac{1}{5}$ . 因  $f''(\frac{1}{5}) = 10 > 0$ , 故当  $z = \frac{1}{5}$  时,  $\triangle ABC$  的面积取得极小值, 由于驻点惟一, 故当  $z = \frac{1}{5}$ , 即  $C$  的

坐标为  $(0, 0, \frac{1}{5})$  时,  $S_{\triangle ABC}$  为最小.

19. 求曲线  $\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$  在三个坐标面上的投影曲线的方程.

解 在  $\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$  中消去  $z$ , 得  $2-x^2-y^2=(x-1)^2+(y-1)^2$ , 即  $x^2+y^2-x-y=0$ . 故  $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=0, \\ z=0 \end{cases}$  为曲线在  $xOy$  面上的投影曲线方程.

在  $\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$  中消去  $y$ , 得  $z=(x-1)^2+(\pm\sqrt{2-x^2-z^2}-1)^2$ , 即  $2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0$ , 故  $\begin{cases} 2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0, \\ y=0 \end{cases}$  为曲线在  $xOz$  面上的投影曲线方程.

同理, 可得  $\begin{cases} 2y^2+2yz+z^2-4y-3z+2=0, \\ x=0. \end{cases}$  它就是曲线在  $yOz$  面上的投影曲线方程.

20. 求锥面  $z=\sqrt{x^2+y^2}$  与柱面  $z^2=2x$  所围立体在三个坐标面上的投影.

解 在  $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z^2=2x \end{cases}$  中消去  $z$ , 得  $2x=x^2+y^2$ , 即  $(x-1)^2+y^2=1$ ,

故立体在  $xOy$  面上的投影为  $\begin{cases} (x-1)^2+y^2 \leq 1, \\ z=0. \end{cases}$

而该立体在  $xOz$  平面上的投影为  $\begin{cases} x \leq z \leq \sqrt{2x}, \\ y=0 \end{cases}$  (如图 8-18), 在  $yOz$  面上的投影

为  $\begin{cases} (\frac{z^2}{2}-1)^2+y^2 \leq 1, z \geq 0, \\ x=0. \end{cases}$

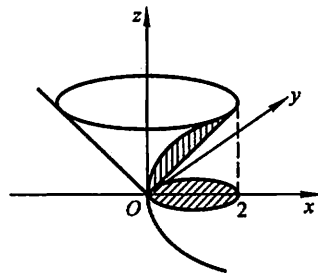


图 8-18

21. 画出下列各曲面所围立体的图形:

(1) 抛物柱面  $2y^2=x$ , 平面  $z=0$  及  $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$ ;

(2) 抛物柱面  $x^2=1-z$ , 平面  $y=0, z=0$  及  $x+y=1$ ;

(3) 圆锥面  $z=\sqrt{x^2+y^2}$  及旋转抛物面  $z=2-x^2-y^2$ ;

(4) 旋转抛物面  $x^2+y^2=z$ , 柱面  $y^2=x$ , 平面  $z=0$  及  $x=1$ .

解 (1) 如图 8-19(1); (2) 如图 8-19(2);

(3) 如图 8-19(3); (4) 如图 8-19(4).

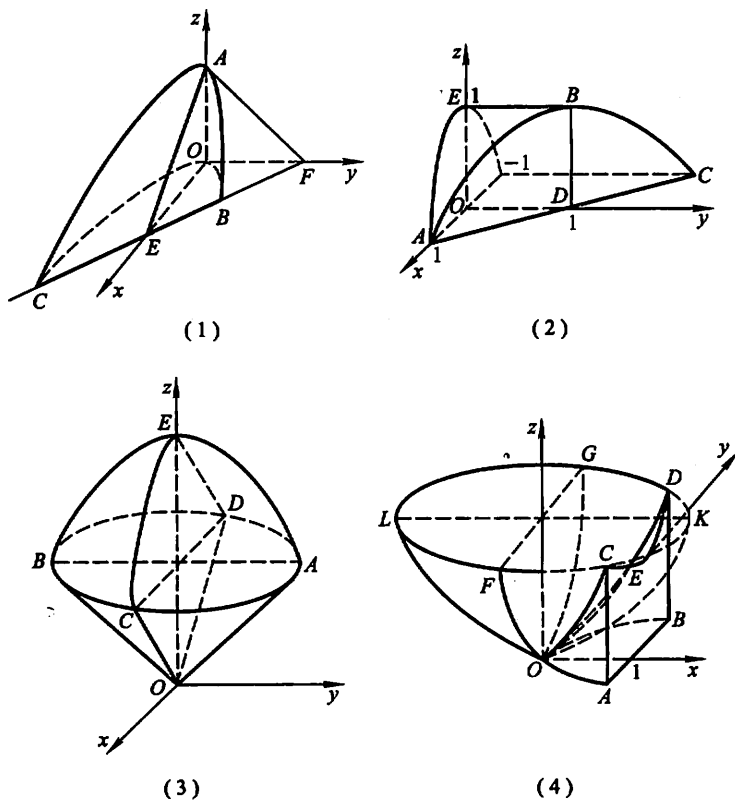


图 8-19

注 在建立了空间直角坐标系后,可按下列方法作图:

- 1° 先作出立体的各表面(曲面),及它们与各坐标面的交线;
- 2° 再作各曲面的交线.



## 第九章 多元函数微分法及其应用

### 习题 9-1

### 多元函数的基本概念

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的聚点所成的点集（称为导集）和边界。

(1)  $\{(x, y) | x \neq 0, y \neq 0\}$ ; (2)  $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ ;

(3)  $\{(x, y) | y > x^2\}$ ;

(4)  $\{(x, y) | x^2 + (y-1)^2 \geq 1\} \cap \{(x, y) | x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$ .

解 (1) 集合是开集，无界集；导集为  $\mathbf{R}^2$ ，边界为  $\{(x, y) | x = 0 \text{ 或 } y = 0\}$ .

(2) 集合既非开集，又非闭集，是有界集；导集为  $\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ ，边界为  $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\}$ .

(3) 集合是开集，区域，无界集；导集为  $\{(x, y) | y \geq x^2\}$ ，边界为  $\{(x, y) | y = x^2\}$ .

(4) 集合是闭集，有界集；导集为集合本身，边界为  $\{(x, y) | x^2 + (y-1)^2 = 1\} \cup \{(x, y) | x^2 + (y-2)^2 = 4\}$ .

2. 已知函数  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y}$ ，试求  $f(tx, ty)$ .

解  $f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 - (tx)(ty) \tan \frac{tx}{ty}$

$$= t^2 \left( x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y} \right)$$

$$= t^2 f(x, y).$$

3. 试证函数  $F(x, y) = \ln x \cdot \ln y$  满足关系式

$$F(xy, uv) = F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v).$$

证  $F(xy, uv) = \ln(xy) \cdot \ln(uv) = (\ln x + \ln y)(\ln u + \ln v)$

$$= \ln x \cdot \ln u + \ln x \cdot \ln v + \ln y \cdot \ln u + \ln y \cdot \ln v$$

$$= F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v).$$

4. 已知函数  $f(u, v, w) = u^w + w^{u+v}$ ，试求  $f(x+y, x-y, xy)$ .

解  $f(x+y, x-y, xy) = (x+y)^{xy} + (xy)^{(x+y)+(x-y)} = (x+y)^{xy} + (xy)^{2x}.$

5. 求下列各函数的定义域:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad z &= \ln(y^2 - 2x + 1); & (2) \quad z &= \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}; \\
 (3) \quad z &= \sqrt{x-\sqrt{y}}; & (4) \quad z &= \ln(y-x) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}; \\
 (5) \quad u &= \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}} (R > r > 0); \\
 (6) \quad u &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.
 \end{aligned}$$

解 (1)  $\{(x, y) | y^2 - 2x + 1 > 0\}$ .  
 (2)  $\{(x, y) | x + y > 0, x - y > 0\}$ .  
 (3)  $\{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^2 \geq y\}$ .  
 (4)  $\{(x, y) | y - x > 0, x \geq 0, x^2 + y^2 < 1\}$ .  
 (5)  $\{(x, y, z) | r^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ .  
 (6)  $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 - z^2 \geq 0, x^2 + y^2 \neq 0\}$ .

注 本题是求多元函数的定义域,与求一元函数的定义域相类似,先写出构成该函数的各个简单函数的定义域,再求出表示这些定义域的集合的交集,即得所求定义域.

6. 求下列各极限:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2}; & \quad (2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}; \\
 (3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}; & \quad (4) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}; \\
 (5) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\tan(xy)}{y}; & \quad (6) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}.
 \end{aligned}$$

解 (1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2} = \frac{1-0}{0+1} = 1$ .

注 本题利用多元初等函数的连续性求极限,即极限值等于函数值.对于多元初等函数在点  $P_0$  处的极限,若  $P_0$  在该函数的定义区域内,均可利用此方法求极限.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1+0}} = \ln 2. \\
 (3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})} \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}} = -\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

注 本题分母的极限为零,不能运用商的极限运算法则,而采用通过分母或分子有理化等方法,消去分母中趋于零的因子,再运用极限运算法则,这是求极限的基本方法之一.

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{1-e^{xy}} \cdot (\sqrt{2-e^{xy}}+1) = -1 \cdot 2 = -2.$$

注 本题利用  $e^{xy} - 1 \sim xy ((x,y) \rightarrow (0,0))$ , 相当于令  $u = xy$ , 当  $(x,y) \rightarrow (0,0)$  且  $xy \neq 0$  时, 有  $u \rightarrow 0$  且  $u \neq 0$ , 于是

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{1-e^{xy}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{-u} = -1.$$

$$(5) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\tan(xy)}{y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\tan(xy)}{xy} \cdot x = 1 \cdot 2 = 2.$$

注 本题利用  $\tan(xy) \sim xy ((x,y) \rightarrow (2,0))$ .

$$(6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}} \\ = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

注 本题利用  $1-\cos(x^2+y^2) \sim \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 ((x,y) \rightarrow (0,0))$ .

\* 7. 证明下列极限不存在:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}; \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

证 (1) 当  $(x,y)$  沿直线  $y=kx$  趋于  $(0,0)$  时, 有

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+k)x}{(1-k)x} = \frac{1+k}{1-k} \quad (k \neq 1).$$

显然它是随着  $k$  的值不同而改变的, 故所求极限不存在.

(2) 依次取  $(x,y) \rightarrow (0,0)$  的两种方式:  $y=x, y=-x$ , 分别求极限:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = 1,$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=-x}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4+4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+4} = 0.$$

两种方式求得的极限值不同, 故所求极限不存在.

注 本题证明极限不存在所采用的方法是: 找出两条不同的路径, 使得点  $P$  沿这两条路径趋于  $P_0$  时,  $f(P)$  的极限存在但不相等; 或者找出一条特殊的路径, 使得点  $P$  沿这条路径趋于  $P_0$  时,  $f(P)$  的极限不存在. 这是证明多元函数极限不存在常用的方法.

8. 函数  $z = \frac{y^2+2x}{y^2-2x}$  在何处是间断的?

解 这函数的定义域为  $D = \{(x, y) | y^2 - 2x \neq 0\}$ , 曲线  $y^2 - 2x = 0$  上各点均为  $D$  的聚点, 且函数在这些点处没有定义, 因此曲线  $y^2 - 2x = 0$  上各点均为函数的间断点.

\* 9. 证明  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ .

证 因为  $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ ,

要使  $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \epsilon$ , 只要  $\sqrt{x^2+y^2} < 2\epsilon$ , 所以  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $\delta = 2\epsilon$ , 则当  $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$  时, 就有  $\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \epsilon$  成立, 即  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ .

\* 10. 设  $F(x, y) = f(x)$ ,  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 证明: 对任意  $y_0 \in R$ ,  $F(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处连续.

证 设  $P_0(x_0, y_0) \in R^2$ , 因为  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 所以  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ . 从而, 当  $P(x, y) \in U(P_0, \delta)$  时,  $|x - x_0| \leq \rho(P, P_0) < \delta$ , 因而有

$$|F(x, y) - F(x_0, y_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \epsilon,$$

即  $F(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处连续.

## 习题 9-2 偏导数

1. 求下列函数的偏导数:

$$(1) z = x^3 y - y^3 x; \quad (2) s = \frac{u^2 + v^2}{uv};$$

$$(3) z = \sqrt{\ln(xy)}; \quad (4) z = \sin(xy) + \cos^2(xy);$$

$$(5) z = \ln \tan \frac{x}{y}; \quad (6) z = (1 + xy)^y;$$

$$(7) u = x^{\frac{y}{z}}; \quad (8) u = \arctan(x - y)^z.$$

解 (1)  $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y - y^3$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3y^2 x$ .

$$\begin{aligned} (2) \frac{\partial s}{\partial u} &= \frac{\frac{\partial}{\partial u}(u^2 + v^2) \cdot uv - (u^2 + v^2) \cdot \frac{\partial}{\partial u}(uv)}{(uv)^2} \\ &= \frac{2u^2 v - (u^2 + v^2)v}{u^2 v^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{v} - \frac{v}{u^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial v} &= \frac{\frac{\partial}{\partial v}(u^2 + v^2) \cdot uv - (u^2 + v^2) \cdot \frac{\partial}{\partial v}(uv)}{(uv)^2} \\ &= \frac{2uv^2 - (u^2 + v^2)u}{u^2v^2} \\ &= \frac{1}{u} - \frac{u}{v^2}.\end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}} \cdot \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}} \cdot \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}.$$

$$(4) \quad \begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= y\cos(xy) + 2\cos(xy) \cdot [-\sin(xy)] \cdot y \\ &= y[\cos(xy) - \sin(2xy)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= x\cos(xy) + 2\cos(xy) \cdot [-\sin(xy)] \cdot x \\ &= x[\cos(xy) - \sin(2xy)].\end{aligned}$$

$$(5) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \cot \frac{x}{y} \cdot \sec^2 \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y} \csc \frac{2x}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cot \frac{x}{y} \cdot \sec^2 \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{2x}{y^2} \csc \frac{2x}{y}.$$

$$(6) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y^2(1+xy)^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[e^{y\ln(1+xy)}] = (1+xy)^y[\ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy}].$$

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x.$$

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(x-y)^z \ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}.$$

$$2. \text{ 设 } T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ 求证 } l \frac{\partial T}{\partial l} + g \frac{\partial T}{\partial g} = 0.$$

$$\text{证 因为} \quad \frac{\partial T}{\partial l} = 2\pi \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}} \cdot \frac{1}{g} = \frac{\pi}{\sqrt{gl}},$$

$$\frac{\partial T}{\partial g} = 2\pi \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}} \cdot \left(-\frac{l}{g^2}\right) = -\frac{\pi\sqrt{l}}{g\sqrt{g}},$$

所以

$$l \frac{\partial T}{\partial l} + g \frac{\partial T}{\partial g} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} - \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 0.$$

3. 设  $z = e^{-(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}$ , 求证  $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$ .

证 因为  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2} e^{-(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2} e^{-(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}$ ,

所以

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 2e^{-(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})} = 2z.$$

4. 设  $f(x, y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$ , 求  $f_x(x, 1)$ .

解

$$f_x(x, y) = 1 + \frac{y-1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{y},$$

$$f_x(x, 1) = 1.$$

5. 曲线  $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4}, \\ y = 4 \end{cases}$  在点  $(2, 4, 5)$  处的切线对于  $x$  轴的倾角是多少?

解 设  $z = f(x, y)$ . 按偏导数的几何意义,  $f_x(2, 4)$  就是曲线在点  $(2, 4, 5)$  处的切线对于  $x$  轴的斜率, 而  $f_x(2, 4) = \frac{1}{2}x|_{x=2} = 1$ , 即  $k = \tan \alpha = 1$ , 于是倾角  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

6. 求下列函数的  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  和  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ :

(1)  $z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$ ;

(2)  $z = \arctan \frac{y}{x}$ ;

(3)  $z = y^x$ .

解 (1)  $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2$ ,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(4x^3 - 8xy^2) = -16xy.$$

(2)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ .

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{(x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$(3) \frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^x \cdot \ln^2 y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (y^x \ln y) = y^{x-1} (1 + x \ln y).$$

7. 设  $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$ , 求  $f_{xx}(0, 0, 1), f_{xx}(1, 0, 2), f_{yz}(0, -1, 0)$  及  $f_{zx}(2, 0, 1)$ .

解 因为  $f_x = y^2 + 2xz, f_{xx} = 2z, f_{xx} = 2x,$

$$f_y = 2xy + z^2, f_{yz} = 2z,$$

$$f_z = 2yz + x^2, f_{zx} = 2y, f_{zx} = 0,$$

所以  $f_{xx}(0, 0, 1) = 2, f_{xx}(1, 0, 2) = 2, f_{yz}(0, -1, 0) = 0, f_{zx}(2, 0, 1) = 0.$

8. 设  $z = x \ln(xy)$ , 求  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$  及  $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ .

解  $\frac{\partial z}{\partial x} = \ln(xy) + x \cdot \frac{y}{xy} = \ln(xy) + 1,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{y^2}.$$

9. 验证:

$$(1) y = e^{-k^2 t} \sin nx \text{ 满足 } \frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2};$$

$$(2) r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ 满足 } \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}.$$

证 (1) 因为  $\frac{\partial y}{\partial t} = -kn^2 e^{-k^2 t} \sin nx, \frac{\partial y}{\partial x} = ne^{-k^2 t} \cos nx,$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (ne^{-k^2 t} \cos nx) = -n^2 e^{-k^2 t} \sin nx,$$

所以  $\frac{\partial y}{\partial t} = k(-n^2 e^{-k^2 t} \sin nx) = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$

$$(2) \text{ 因为 } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \right) = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = \frac{r^2 - x^2}{r^3},$$

由函数关于自变量的对称性,得

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{r^2 - y^2}{r^3}, \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{r^2 - z^2}{r^3},$$

所以 
$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3} = \frac{2}{r}.$$

### 习题 9-3

### 全微分

1. 求下列函数的全微分:

(1)  $z = xy + \frac{x}{y}$ ; (2)  $z = e^{\frac{x}{y}}$ ;

(3)  $z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ; (4)  $u = x^{yz}$ .

解 (1) 因为  $\frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{1}{y}, \frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}$ ,

所以  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \left( y + \frac{1}{y} \right) dx + \left( x - \frac{x}{y^2} \right) dy.$

(2) 因为  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} e^{\frac{x}{y}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} e^{\frac{x}{y}}$ ,

所以  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{x}{y}} (y dx - x dy).$

(3) 因为  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

所以  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (y dx - x dy).$

(4) 因为  $\frac{\partial u}{\partial x} = yzx^{yz-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = zx^{yz} \ln x, \frac{\partial u}{\partial z} = yx^{yz} \ln x,$

所以  $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = yzx^{yz-1} dx + zx^{yz} \ln x dy + yx^{yz} \ln x dz.$

2. 求函数  $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$  当  $x = 1, y = 2$  时的全微分.

解 因为  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2},$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=1, y=2} = \frac{1}{3}, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x=1, y=2} = \frac{2}{3},$$



所以

$$dz\Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \frac{1}{3}dx + \frac{2}{3}dy.$$

3. 求函数  $z = \frac{y}{x}$  当  $x = 2, y = 1, \Delta x = 0.1, \Delta y = -0.2$  时的全增量和全微分.

$$\text{解 } \Delta z = \frac{y+\Delta y}{x+\Delta x} - \frac{y}{x}, dz = -\frac{y}{x^2}\Delta x + \frac{1}{x}\Delta y.$$

当  $x = 2, y = 1, \Delta x = 0.1, \Delta y = -0.2$  时,

$$\text{全增量 } \Delta z = \frac{1+(-0.2)}{2+0.1} - \frac{1}{2} = -0.119,$$

$$\text{全微分 } dz = -\frac{1}{4} \cdot 0.1 + \frac{1}{2} \cdot (-0.2) = -0.125.$$

4. 求函数  $z = e^{xy}$  当  $x = 1, y = 1, \Delta x = 0.15, \Delta y = 0.1$  时的全微分.

$$\text{解 } dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = ye^{xy}\Delta x + xe^{xy}\Delta y.$$

当  $x = 1, y = 1, \Delta x = 0.15, \Delta y = 0.1$  时, 全微分

$$dz = e \cdot 0.15 + e \cdot 0.1 = 0.25e.$$

5. 考虑二元函数  $f(x, y)$  的下面四条性质:

- (1)  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  连续.
- (2)  $f_x(x, y), f_y(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  连续.
- (3)  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  可微分.
- (4)  $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$  存在.

若用“ $P \Rightarrow Q$ ”表示可由性质  $P$  推出性质  $Q$ , 则下列四个选项中正确的是 ( ).

- (A)  $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ .
- (B)  $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$ .
- (C)  $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$ .
- (D)  $(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4)$ .

解 由于二元函数偏导数存在且连续是二元函数可微分的充分条件, 二元函数可微分必定可(偏)导, 二元函数可微分必定连续, 因此选项(A)正确.

选项(B)中  $(3) \nRightarrow (2)$ , 选项(C)中  $(4) \nRightarrow (1)$ , 选项(D)中  $(1) \nRightarrow (4)$ .

\* 6. 计算  $\sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3}$  的近似值.

解 设  $z = \sqrt{x^3 + y^3}$ , 则

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+\Delta x)^3 + (y+\Delta y)^3} &= \sqrt{x^3 + y^3} + \Delta z \approx \sqrt{x^3 + y^3} + dz \\ &= \sqrt{x^3 + y^3} + \frac{3x^2\Delta x + 3y^2\Delta y}{2\sqrt{x^3 + y^3}}.\end{aligned}$$

取  $x = 1, y = 2, \Delta x = 0.02, \Delta y = -0.03$ , 可得

$$\sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3} \approx \sqrt{1+2^3} + \frac{3 \cdot 1 \cdot 0.02 + 3 \cdot 2^2 \cdot (-0.03)}{2\sqrt{1+2^3}} = 2.95.$$

\* 7. 计算  $(1.97)^{1.05}$  的近似值 ( $\ln 2 = 0.693$ ).

解 设  $z = x^y$ , 则

$$(x + \Delta x)^{y + \Delta y} = x^y + \Delta z \approx x^y + dz = x^y + yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \cdot \Delta y.$$

取  $x = 2, y = 1, \Delta x = -0.03, \Delta y = 0.05$ , 可得

$$(1.97)^{1.05} \approx 2 - 0.03 + 2\ln 2 \cdot 0.05 = 1.97 + 0.0693 \approx 2.039.$$

\* 8. 已知边长为  $x = 6\text{ m}$  与  $y = 8\text{ m}$  的矩形, 如果  $x$  边增加  $5\text{ cm}$  而  $y$  边减少  $10\text{ cm}$ , 问这个矩形的对角线的近似变化怎样?

解 矩形的对角线的长为  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x\Delta x + y\Delta y).$$

当  $x = 6, y = 8, \Delta x = 0.05, \Delta y = -0.1$  时,

$$\Delta z \approx \frac{1}{\sqrt{6^2 + 8^2}}(6 \cdot 0.05 - 8 \cdot 0.1) = -0.05,$$

即, 这个矩形的对角线的长减少大约  $5\text{ cm}$ .

\* 9. 设有一无盖圆柱形容器, 容器的壁与底的厚度均为  $0.1\text{ cm}$ , 内高为  $20\text{ cm}$ , 内半径为  $4\text{ cm}$ . 求容器外壳体积的近似值.

解 圆柱体的体积公式为  $V = \pi R^2 H$ , 圆柱形容器的外壳体积就是圆柱体体积  $V$  的增量  $\Delta V$ , 而

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial V}{\partial H}\Delta H = 2\pi R H \Delta R + \pi R^2 \Delta H.$$

当  $R = 4, H = 20, \Delta R = \Delta H = 0.1$  时,

$$\Delta V \approx 2 \cdot 3.14 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 0.1 + 3.14 \cdot 4^2 \cdot 0.1 \approx 55.3,$$

即容器外壳的体积大约是  $55.3\text{ cm}^3$ .

\* 10. 设有直角三角形, 测得其两直角边的长分别为  $7 \pm 0.1\text{ cm}$  和  $24 \pm 0.1\text{ cm}$ . 试求利用上述二值来计算斜边长度时的绝对误差.

解 设两直角边长度分别为  $x$  和  $y$ , 则斜边长度为  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

$$\begin{aligned} |\Delta z| &\approx |dz| = \left| \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y \right| \leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| |\Delta y| \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x|\Delta x| + y|\Delta y|) \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x\delta_x + y\delta_y), \end{aligned}$$

便得

$$\delta_z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x\delta_x + y\delta_y).$$

当  $x = 7, y = 24, \delta_x = 0.1, \delta_y = 0.1$  时,

$$\delta_z = \frac{1}{\sqrt{7^2 + 24^2}}(7 \cdot 0.1 + 24 \cdot 0.1) = 0.124.$$

即计算斜边长度  $z$  的绝对误差约为  $0.124 \text{ cm}$ .

\* 11. 测得一块三角形土地的两边边长分别为  $63 \pm 0.1 \text{ m}$  和  $78 \pm 0.1 \text{ m}$ , 这两边的夹角为  $60^\circ \pm 1^\circ$ . 试求三角形面积的近似值, 并求其绝对误差和相对误差.

解 设三角形的两边长分别为  $a$  和  $b$ , 它们的夹角为  $\theta$ , 则三角形的面积为

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta,$$

$$\begin{aligned} |\Delta S| &\approx |dS| = \left| \frac{\partial S}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial S}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial S}{\partial \theta} \Delta \theta \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial S}{\partial a} \right| |\Delta a| + \left| \frac{\partial S}{\partial b} \right| |\Delta b| + \left| \frac{\partial S}{\partial \theta} \right| |\Delta \theta| \\ &= \frac{1}{2}b\sin\theta |\Delta a| + \frac{1}{2}a\sin\theta |\Delta b| + \frac{1}{2}ab\cos\theta |\Delta \theta| \\ &\leq \frac{1}{2}b\sin\theta \delta_a + \frac{1}{2}a\sin\theta \delta_b + \frac{1}{2}ab\cos\theta \delta_\theta, \end{aligned}$$

便得

$$\delta_s = \frac{1}{2}b\sin\theta \delta_a + \frac{1}{2}a\sin\theta \delta_b + \frac{1}{2}ab\cos\theta \delta_\theta.$$

当  $a = 63, b = 78, \theta = \frac{\pi}{3}, \delta_a = 0.1, \delta_b = 0.1, \delta_\theta = \frac{\pi}{180}$  时, 三角形面积的近似值为

$$S = \frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 78 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 2127.8 (\text{m}^2),$$

绝对误差为

$$\begin{aligned} \delta_s &= \frac{1}{2} \cdot 78 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0.1 + \frac{1}{2} \cdot 63 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0.1 + \frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 78 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \\ &= 27.6 (\text{m}^2), \end{aligned}$$

相对误差为

$$\frac{\delta_s}{S} = \frac{27.6}{2127.8} = 1.30\%.$$

\* 12. 利用全微分证明: 两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

解 设  $u = x + y$ , 则

$$\begin{aligned} |\Delta u| &\approx |du| = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \right| \\ &= |\Delta x + \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y| \leq \delta_x + \delta_y, \end{aligned}$$

便得

$$\delta_u = \delta_x + \delta_y,$$

即两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

\* 13. 利用全微分证明: 乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和; 商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

解 设  $u = xy, v = \frac{x}{y}$ , 则

$$|\Delta u| \approx |du| = |y\Delta x + x\Delta y| \leq |y||\Delta x| + |x||\Delta y| \leq |y|\delta_x + |x|\delta_y,$$

$$|\Delta v| \approx |dv| = \left| \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y^2} \right| \leq \frac{|y||\Delta x| + |x||\Delta y|}{|y|^2} \leq \frac{|y|\delta_x + |x|\delta_y}{|y|^2},$$

便得

$$\delta_u = |y|\delta_x + |x|\delta_y, \quad \delta_v = \frac{|y|\delta_x + |x|\delta_y}{|y|^2},$$

$$\frac{\delta_u}{|u|} = \frac{|y|\delta_x + |x|\delta_y}{|xy|} = \frac{\delta_x}{|x|} + \frac{\delta_y}{|y|},$$

$$\frac{\delta_v}{|v|} = \frac{1}{\left|\frac{x}{y}\right|} \cdot \frac{|y|\delta_x + |x|\delta_y}{|y|^2} = \frac{\delta_x}{|x|} + \frac{\delta_y}{|y|}.$$

即乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和, 商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

### 习题 9-4

### 多元复合函数的求导法则

1. 设  $z = u^2 + v^2$ , 而  $u = x + y, v = x - y$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \cdot 1 + 2v \cdot 1 = 2(u + v) = 4x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \cdot 1 + 2v \cdot (-1) = 2(u - v) = 4y.$$

2. 设  $z = u^2 \ln v$ , 而  $u = \frac{x}{y}, v = 3x - 2y$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \ln v \cdot \frac{1}{y} + \frac{u^2}{v} \cdot 3$$

$$= \frac{2x}{y^2} \ln(3x - 2y) + \frac{3x^2}{(3x - 2y)y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \ln v \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{u^2}{v} \cdot (-2)$$

$$= -\frac{2x^2}{y^3} \ln(3x-2y) - \frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}.$$

3. 设  $z = e^{x-2y}$ , 而  $x = \sin t, y = t^3$ , 求  $\frac{dz}{dt}$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{x-2y} \cdot \cos t + e^{x-2y} \cdot (-2) \cdot 3t^2 \\ &= e^{x-2y} (\cos t - 6t^2) = e^{\sin t - 2t^3} (\cos t - 6t^2).\end{aligned}$$

4. 设  $z = \arcsin(x-y)$ , 而  $x = 3t, y = 4t^3$ , 求  $\frac{dz}{dt}$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \cdot 3 + \frac{(-1)}{\sqrt{1-(x-y)^2}} \cdot 12t^2 \\ &= \frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}.\end{aligned}$$

5. 设  $z = \arctan(xy)$ , 而  $y = e^x$ , 求  $\frac{dz}{dx}$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^2y^2} + \frac{x}{1+x^2y^2} \cdot e^x \\ &= \frac{(1+x)e^x}{1+x^2e^{2x}}.\end{aligned}$$

6. 设  $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$ , 而  $y = a \sin x, z = \cos x$ , 求  $\frac{du}{dx}$ .

$$\begin{aligned}\text{解 } \frac{du}{dx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{ae^{ax}(y-z)}{a^2+1} + \frac{e^{ax}}{a^2+1} \cdot a \cos x + \frac{e^{ax}}{a^2+1} \cdot (-1) \cdot (-\sin x) \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2+1} (a^2 \sin x - a \cos x + a \cos x + \sin x) \\ &= e^{ax} \sin x.\end{aligned}$$

7. 设  $z = \arctan \frac{x}{y}$ , 而  $x = u+v, y = u-v$ , 验证

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

$$\begin{aligned}\text{证 } \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} &= \left( \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot 1 + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot 1 + \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot 1 \\ &\quad + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot (-1) = \frac{u-v}{u^2+v^2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot (-1) \\
 & = \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{u-v}{u^2 + v^2},
 \end{aligned}$$

故等式成立.

8. 求下列函数的一阶偏导数(其中  $f$  具有一阶连续偏导数):

$$(1) u = f(x^2 - y^2, e^{xy}); \quad (2) u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right);$$

$$(3) u = f(x, xy, xyz).$$

解 (1) 将中间变量  $x^2 - y^2, e^{xy}$  依次编为 1, 2 号, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) + f'_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) = 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_1 \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) + f'_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}) = -2yf'_1 + xe^{xy}f'_2.$$

$$(2) \text{ 令 } s = \frac{x}{y}, t = \frac{y}{z}, \text{ 则 } u = f(s, t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{y}f'_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}f'_1 + \frac{1}{z}f'_2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}f'_2.$$

(3) 将中间变量  $x, xy, xyz$  依次编为 1, 2, 3 号, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 \cdot 1 + f'_2 \cdot y + f'_3 \cdot yz = f'_1 + yf'_2 + yzf'_3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_2 \cdot x + f'_3 \cdot xz = xf'_2 + xzf'_3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f'_3 \cdot xy = xyf'_3.$$

9. 设  $z = xy + xF(u)$ , 而  $u = \frac{y}{x}$ ,  $F(u)$  为可导函数, 证明

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + xy.$$

$$\begin{aligned}
 \text{证 } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} &= x \left[ y + F(u) + xF'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + y \left[ x + xF'(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\
 &= x \left[ y + F(u) - \frac{y}{x}F'(u) \right] + y \left[ x + F'(u) \right]
 \end{aligned}$$

$$= xy + xF(u) + xy = z + xy,$$

故等式成立.

10. 设  $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$ , 其中  $f(u)$  为可导函数, 验证

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

证  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y \cdot f'_u \cdot 2x}{f^2(u)} = -\frac{2xyf'_u}{f^2(u)},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f(u) - yf'_u \cdot (-2y)}{f^2(u)} = \frac{1}{f(u)} + \frac{2y^2f'_u}{f^2(u)},$$

故  $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2yf'_u}{f^2(u)} + \frac{1}{yf(u)} + \frac{2yf'_u}{f^2(u)} = \frac{1}{yf(u)}$   

$$= \frac{z}{y^2}.$$

11. 设  $z = f(x^2 + y^2)$ , 其中  $f$  具有二阶导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

解 令  $u = x^2 + y^2$ , 则  $z = f(u)$ . 记  $f' = f'(u), f'' = f''(u)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2xf',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial y} = 2yf',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f'' + 2xf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2f'' + 4x^2 f'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 4xyf'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f'' + 2yf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2f'' + 4y^2 f''.$$

\* 12. 求下列函数的  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  (其中  $f$  具有二阶连续偏导数):

(1)  $z = f(xy, y);$  (2)  $z = f\left(x, \frac{x}{y}\right);$

(3)  $z = f(xy^2, x^2y);$  (4)  $z = f(\sin x, \cos y, e^{x+y}).$

解 (1) 令  $s = xy, t = y$ , 则  $z = f(s, t)$ ,  $s$  和  $t$  是中间变量. 将  $s, t$  依次编为 1, 2 号, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = yf'_1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + f'_2 \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = xf'_1 + f'_2.$$

因为  $f(s, t)$  是  $s$  和  $t$  的函数, 所以  $f'_1$  和  $f'_2$  也是  $s$  和  $t$  的函数, 从而  $f'_1$  和  $f'_2$  是以  $s$  和  $t$  为中间变量的  $x$  和  $y$  的函数. 故

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (y f_1') = y f_{11}'' \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = y^2 f_{11}'', \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (y f_1') = f_1' + y \left( f_{11}'' \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + f_{12}'' \cdot \frac{dt}{dy} \right) \\ &= f_1' + xy f_{11}'' + y f_{12}'', \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (x f_1' + f_2') \\ &= x \left( f_{11}'' \frac{\partial s}{\partial y} + f_{12}'' \frac{dt}{dy} \right) + f_{21}'' \frac{\partial s}{\partial y} + f_{22}'' \frac{dt}{dy} \\ &= x^2 f_{11}'' + 2x f_{12}'' + f_{22}''.\end{aligned}$$

(2) 令  $s = x, t = \frac{x}{y}$ , 并将  $s, t$  依次编为 1, 2 号, 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= f_1' \frac{ds}{dx} + f_2' \frac{dt}{dx} = f_1' + \frac{1}{y} f_2', \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= f_2' \frac{dt}{dy} = -\frac{x}{y^2} f_2'.\end{aligned}$$

因为  $f(s, t)$  是  $s$  和  $t$  的函数, 所以  $f_1'$  和  $f_2'$  也是  $s$  和  $t$  的函数, 从而  $f_1'$  和  $f_2'$  是以  $s$  和  $t$  为中间变量的  $x$  和  $y$  的函数. 故

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( f_1' + \frac{1}{y} f_2' \right) = f_{11}'' + f_{12}'' \cdot \frac{dt}{dx} + \frac{1}{y} \left( f_{21}'' + f_{22}'' \cdot \frac{dt}{dx} \right) \\ &= f_{11}'' + \frac{2}{y} f_{12}'' + \frac{1}{y^2} f_{22}'', \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( f_1' + \frac{1}{y} f_2' \right) = f_{12}'' \cdot \frac{dt}{dy} - \frac{1}{y^2} f_2' + \frac{1}{y} f_{22}'' \frac{dt}{dy} \\ &= -\frac{x}{y^2} f_{12}'' - \frac{1}{y^2} f_2' - \frac{x}{y^3} f_{22}'', \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{x}{y^2} f_2' \right) = \frac{2x}{y^3} f_2' - \frac{x}{y^2} f_{22}'' \frac{dt}{dy} = \frac{2x}{y^3} f_2' + \frac{x^2}{y^4} f_{22}''.\end{aligned}$$

(3) 令  $s = xy^2, t = x^2y$ , 并将  $s, t$  依次编为 1, 2 号, 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= f_1' \frac{\partial s}{\partial x} + f_2' \frac{\partial t}{\partial x} = y^2 f_1' + 2xy f_2', \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= f_1' \frac{\partial s}{\partial y} + f_2' \frac{\partial t}{\partial y} = 2xy f_1' + x^2 f_2', \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (y^2 f_1' + 2xy f_2') \\ &= y^2 \left( f_{11}'' \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + f_{12}'' \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \right) + 2y f_2' + 2xy \left( f_{21}'' \frac{\partial s}{\partial x} + f_{22}'' \frac{\partial t}{\partial x} \right) \\ &= y^2 (y^2 f_{11}'' + 2xy f_{12}'') + 2y f_2' + 2xy (y^2 f_{21}'' + 2xy f_{22}'') \\ &= 2y f_2' + y^4 f_{11}'' + 4xy^3 f_{12}'' + 4x^2 y^2 f_{22}'',\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (y^2 f'_1 + 2xy f'_2) \\
&= 2y f'_1 + y^2 \left( f''_{11} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{12} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} \right) \\
&\quad + 2x f'_2 + 2xy \left( f''_{21} \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{22} \frac{\partial t}{\partial y} \right) \\
&= 2y f'_1 + y^2 (2xy f''_{11} + x^2 f''_{12}) + 2x f'_2 \\
&\quad + 2xy (2xy f''_{21} + x^2 f''_{22}) \\
&= 2y f'_1 + 2x f'_2 + 2xy^3 f''_{11} + 5x^2 y^2 f''_{12} + 2x^3 y f''_{22},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2xy f'_1 + x^2 f'_2) \\
&= 2x f'_1 + 2xy \left( f''_{11} \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{12} \frac{\partial t}{\partial y} \right) + x^2 \left( f''_{21} \frac{\partial s}{\partial y} + f''_{22} \frac{\partial t}{\partial y} \right) \\
&= 2x f'_1 + 2xy (2xy f''_{11} + x^2 f''_{12}) + x^2 (2xy f''_{21} + x^2 f''_{22}) \\
&= 2x f'_1 + 4x^2 y^2 f''_{11} + 4x^3 y f''_{12} + x^4 f''_{22}.
\end{aligned}$$

(4) 令  $u = \sin x, v = \cos y, w = e^{x+y}$ , 并将  $u, v, w$  依次编为 1, 2, 3 号, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \frac{du}{dx} + f'_3 \frac{\partial w}{\partial x} = \cos x f'_1 + e^{x+y} f'_3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_2 \frac{dv}{dy} + f'_3 \frac{\partial w}{\partial y} = -\sin y f'_2 + e^{x+y} f'_3,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\cos x f'_1 + e^{x+y} f'_3) \\
&= -\sin x f'_1 + \cos x \left( f''_{11} \frac{du}{dx} + f''_{13} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + e^{x+y} f'_3 + e^{x+y} \left( f''_{31} \frac{du}{dx} + f''_{33} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
&= -\sin x f'_1 + \cos x (\cos x f''_{11} + e^{x+y} f''_{13}) + e^{x+y} f'_3 + e^{x+y} (\cos x f''_{31} + e^{x+y} f''_{33}) \\
&= e^{x+y} f'_3 - \sin x f'_1 + \cos^2 x f''_{11} + 2e^{x+y} \cos x f''_{13} + e^{2(x+y)} f''_{33},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\cos x f'_1 + e^{x+y} f'_3) \\
&= \cos x \left( f''_{12} \frac{dv}{dy} + f''_{13} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + e^{x+y} f'_3 + e^{x+y} \left( f''_{32} \frac{dv}{dy} + f''_{33} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
&= \cos x (-\sin y f''_{12} + e^{x+y} f''_{13}) + e^{x+y} f'_3 + e^{x+y} (-\sin y f''_{32} + e^{x+y} f''_{33}) \\
&= e^{x+y} f'_3 - \cos x \sin y f''_{12} + e^{x+y} \cos x f''_{13} - e^{x+y} \sin y f''_{32} + e^{2(x+y)} f''_{33}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (-\sin y f'_2 + e^{x+y} f'_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\cos y f_2' - \sin y \left( f_{22}'' \frac{dv}{dy} + f_{23}'' \frac{\partial w}{\partial y} \right) + e^{\tau+y} f_3' + e^{\tau+y} \left( f_{32}'' \frac{dv}{dy} + f_{33}'' \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
&= -\cos y f_2' - \sin y (-\sin y f_{22}'' + e^{\tau-y} f_{23}'') + e^{\tau+y} f_3' + e^{\tau-y} (-\sin y f_{32}'' + e^{\tau+y} f_{33}'') \\
&= e^{\tau+y} f_3' - \cos y f_2' + \sin^2 y f_{22}'' - 2e^{\tau+y} \sin y f_{23}'' + e^{2(\tau+y)} f_{33}''.
\end{aligned}$$

\* 13. 设  $u = f(x, y)$  的所有二阶偏导数连续, 而

$$x = \frac{s - \sqrt{3}t}{2}, y = \frac{\sqrt{3}s + t}{2},$$

证明

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$$

及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

证 因为  $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial y},$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y},$$

所以  $\left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$   
 $= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$

又因为  $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial s} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial t} \right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$= \frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

所以  $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ .

### 习题 9-5

### 隐函数的求导公式

1. 设  $\sin y + e^x - xy^2 = 0$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

解 设  $F(x, y) = \sin y + e^x - xy^2$ , 则

$$F_x = e^x - y^2, F_y = \cos y - 2xy.$$

当  $F_y \neq 0$  时, 有

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{e^x - y^2}{\cos y - 2xy} \\ &= \frac{y^2 - e^x}{\cos y - 2xy}.\end{aligned}$$

2. 设  $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

解 设  $F(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x}$ , 则一阶偏导数分别为

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x + y}{x^2 + y^2},$$

$$F_y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{y - x}{x^2 + y^2}.$$

当  $F_y \neq 0$  时, 有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x + y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y - x}{x^2 + y^2} = \frac{x + y}{x - y}.$$

3. 设  $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  及  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

解法一 设  $F(x, y, z) = x + 2y + z - 2\sqrt{xyz}$ , 则

$$F_x = 1 - \frac{yz}{\sqrt{xyz}}, F_y = 2 - \frac{xz}{\sqrt{xyz}}, F_z = 1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}}.$$

于是当  $F_z \neq 0$  时, 有  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}.$$

解法二 在所给方程两端分别对  $x$  求偏导数, 并注意  $z = z(x, y)$ , 得

$$1 + \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{xyz}} \left( yz + xy \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0,$$

当  $1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}} \neq 0$  时, 解得  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{yz}{\sqrt{xyz}} - 1}{1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}}} = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}.$

同理, 方程两端分别对  $y$  求偏导数, 得

$$2 + \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{1}{\sqrt{xyz}} \left( xz + xy \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0,$$

当  $1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}} \neq 0$  时, 解得  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{xz}{\sqrt{xyz}} - 2}{1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}}} = \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}.$

解法三 对所给方程两端分别求全微分, 得

$$dx + 2dy + dz - \frac{1}{\sqrt{xyz}} (yz dx + xz dy + xy dz) = 0,$$

即  $\left(1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}}\right) dz = \left(\frac{yz}{\sqrt{xyz}} - 1\right) dx + \left(\frac{xz}{\sqrt{xyz}} - 2\right) dy.$

当  $\sqrt{xyz} - xy \neq 0$  时, 解得  $dz = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy} dx + \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy} dy.$

所以  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}.$

4. 设  $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  及  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

解 令  $F(x, y, z) = \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y}$ , 则

$$F_x = \frac{1}{z}, F_y = -\frac{1}{z} \cdot \left(-\frac{z}{y^2}\right) = \frac{1}{y},$$

$$F_z = -\frac{x}{z^2} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{x+z}{z^2}.$$

于是当  $F_z \neq 0$  时, 有  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{1}{z} / \left(-\frac{x+z}{z^2}\right) = \frac{z}{x+z},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{1}{y} / \left(-\frac{x+z}{z^2}\right) = \frac{z^2}{y(x+z)}.$$

5. 设  $2\sin(x+2y-3z) = x+2y-3z$ , 证明  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$

证 设  $F(x, y, z) = 2\sin(x+2y-3z) - x - 2y + 3z$ , 则

$$F_x = 2\cos(x+2y-3z) - 1,$$

$$F_y = 2\cos(x+2y-3z) \cdot 2 - 2 = 2F_x,$$

$$F_z = 2\cos(x+2y-3z) \cdot (-3) + 3 = -3F_x,$$

故当  $F_x \neq 0$  时, 有  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_x}{F_x} - \frac{F_y}{F_x} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ .

6. 设  $x=x(y, z), y=y(x, z), z=z(x, y)$  都是由方程  $F(x, y, z)=0$  所确定的具有连续偏导数的函数, 证明:  $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$ .

证 因为  $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x}, \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_y}, \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z},$

所以  $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{F_y}{F_x}\right) \cdot \left(-\frac{F_z}{F_y}\right) \cdot \left(-\frac{F_x}{F_z}\right) = -1.$

7. 设  $\Phi(u, v)$  具有连续偏导数, 证明由方程  $\Phi(cx-az, cy-bz)=0$  所确定的函数  $z=f(x, y)$  满足  $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$ .

证 令  $u=cx-az, v=cy-bz$ , 则

$$\Phi_x = \Phi_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = c\Phi_u,$$

$$\Phi_y = \Phi_v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = c\Phi_v,$$

$$\Phi_z = \Phi_u \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \Phi_v \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -a\Phi_u - b\Phi_v.$$

故当  $\Phi_z \neq 0$  时, 有  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\Phi_x}{\Phi_z} = \frac{c\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\Phi_y}{\Phi_z} = \frac{c\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v}.$$

于是  $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = a \cdot \frac{c\Phi_u}{a\Phi_u + b\Phi_v} + b \cdot \frac{c\Phi_v}{a\Phi_u + b\Phi_v} = c.$

8. 设  $e^z - xyz = 0$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

解 设  $F(x, y, z) = e^z - xyz$ , 则  $F_x = -yz, F_z = e^z - xy$ .

于是当  $F_z \neq 0$  时, 有  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{e^z - xy},$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{y \frac{\partial z}{\partial x} (e^z - xy) - yz \left( e^z \frac{\partial z}{\partial x} - y \right)}{(e^z - xy)^2} \\ &= \frac{y^2 z - yz \left( e^z \cdot \frac{yz}{e^z - xy} - y \right)}{(e^z - xy)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2y^2ze^z - 2xy^3z - y^2z^2e^z}{(e^z - xy)^3}.$$

9. 设  $z^3 - 3xyz = a^3$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

解 设  $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - a^3$ , 则

$$F_x = -3yz, F_y = -3xz, F_z = 3z^2 - 3xy.$$

于是当  $F_z \neq 0$  时, 有  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{z^2 - xy}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{z^2 - xy}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{yz}{z^2 - xy} \right) \\ &= \frac{\left( z + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) (z^2 - xy) - yz \left( 2z \frac{\partial z}{\partial y} - x \right)}{(z^2 - xy)^2} \\ &= \frac{\left( z + \frac{xyz}{z^2 - xy} \right) \cdot (z^2 - xy) - yz \left( \frac{2xz^2}{z^2 - xy} - x \right)}{(z^2 - xy)^2} \\ &= \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}. \end{aligned}$$

10. 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数:

(1) 设  $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20, \end{cases}$  求  $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ ;

(2) 设  $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$  求  $\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}$ ;

(3) 设  $\begin{cases} u = f(ux, v+y), \\ v = g(u-x, v^2y), \end{cases}$  其中  $f, g$  具有一阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ ;

(4) 设  $\begin{cases} x = e^u + u \sin v, \\ y = e^u - u \cos v, \end{cases}$  求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ .

解 (1) 分别在两个方程两端对  $x$  求导, 得

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 2x + 2y \frac{dy}{dx}, \\ 2x + 4y \frac{dy}{dx} + 6z \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

移项, 得

$$\begin{cases} 2y \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = -2x, \\ 2y \frac{dy}{dx} + 3z \frac{dz}{dx} = -x. \end{cases}$$

当  $D = \begin{vmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 3z \end{vmatrix} = 6yz + 2y \neq 0$  时, 解方程组得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -2x & -1 \\ -x & 3z \end{vmatrix}}{D} = \frac{-6xz - x}{6yz + 2y} = \frac{-x(6z + 1)}{2y(3z + 1)},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} 2y & -2x \\ 2y & -x \end{vmatrix}}{D} = \frac{2xy}{6yz + 2y} = \frac{x}{3z + 1}.$$

(2) 所给方程组确定两个一元隐函数:  $x = x(z)$  和  $y = y(z)$ , 将所给方程的两端分别对  $z$  求导并移项, 得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} = -1, \\ 2x \frac{dx}{dz} + 2y \frac{dy}{dz} = -2z. \end{cases}$$

当  $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2(y - x) \neq 0$  时, 解方程组得

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2z & 2y \end{vmatrix}}{D} = \frac{-2y + 2z}{2(y - x)} = \frac{y - z}{x - y},$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2x & -2z \end{vmatrix}}{D} = \frac{-2z + 2x}{2(y - x)} = \frac{z - x}{x - y}.$$

(3) 此方程组可以确定两个二元隐函数:  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ . 分别在方程两端对  $x$  求偏导数, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 \cdot \left(u + x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + f'_2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = g'_1 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} - 1\right) + 2g'_2 yv \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

移项整理后得

$$\begin{cases} (xf'_1 - 1) \frac{\partial u}{\partial x} + f'_2 \frac{\partial v}{\partial x} = -uf'_1, \\ g'_1 \frac{\partial u}{\partial x} + (2yvg'_2 - 1) \frac{\partial v}{\partial x} = g'_1. \end{cases}$$

当  $D = \begin{vmatrix} xf'_1 - 1 & f'_2 \\ g'_1 & 2yvg'_2 - 1 \end{vmatrix} = (xf'_1 - 1)(2yvg'_2 - 1) - f'_2 g'_1 \neq 0$  时, 解

方程组得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} -uf'_1 & f'_2 \\ g'_1 & 2yvg'_2 - 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-uf'_1(2yvg'_2-1)-f'_2g'_1}{(xf'_1-1)(2yvg'_2-1)-f'_2g'_1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} xf'_1-1 & -uf'_1 \\ g'_1 & g'_1 \end{vmatrix} = \frac{g'_1(xf'_1+uf'_1-1)}{(xf'_1-1)(2yvg'_2-1)-f'_2g'_1}.$$

(4) 此方程组确定两个二元隐函数  $u=u(x,y), v=v(x,y)$  是已知函数的反函数, 令

$$F(x,y,u,v) = x - e^u - u \sin v,$$

$$G(x,y,u,v) = y - e^u + u \cos v.$$

则  $F_x=1, F_y=0, F_u=-e^u-\sin v, F_v=-u \cos v,$

$$G_x=0, G_y=1, G_u=-e^u+\cos v, G_v=-u \sin v.$$

$$\text{当 } J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -e^u-\sin v & -u \cos v \\ -e^u+\cos v & -u \sin v \end{vmatrix} = ue^u(\sin v - \cos v) + u \neq 0$$

时, 由隐函数求导公式得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & -u \cos v \\ 0 & -u \sin v \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} 0 & -u \cos v \\ 1 & -u \sin v \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} -e^u-\sin v & 1 \\ -e^u+\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\cos v - e^u}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} -e^u-\sin v & 0 \\ -e^u+\cos v & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sin v + e^u}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}.$$

11. 设  $y=f(x,t)$ , 而  $t=t(x,y)$  是由方程  $F(x,y,t)=0$  所确定的函数, 其中  $f, F$  都具有二阶连续偏导数. 试证明

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}.$$

证法一 由方程组  $\begin{cases} y=f(x,t), \\ F(x,y,t)=0 \end{cases}$  可确定两个一元隐函数  $y=y(x), t=t(x)$ .



分别在两个方程两端对  $x$  求导可得

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx}, \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} = 0. \end{cases}$$

移项得

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}. \end{cases}$$

当  $D = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$  时, 解方程组得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{D} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial t} \\ -\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}}.$$

证法二 分别在  $y=f(x,t)$  及  $F(x,y,t)=0$  两端求全微分, 得

$$\begin{cases} dy = f_x dx + f_t dt, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} F_x dx + F_y dy + F_t dt = 0. \end{cases} \quad (2)$$

由(2), 得

$$F_t dt = -(F_x dx + F_y dy). \quad (3)$$

将  $F_t$  乘以(1)式两端, 并以(3)式代入, 得

$$F_t dy = f_x F_t dx - f_t (F_x dx + F_y dy),$$

即

$$(F_t + f_t F_y) dy = (f_x F_t - f_t F_x) dx.$$

故当  $F_t + f_t F_y \neq 0$  时, 有  $\frac{dy}{dx} = \frac{f_x F_t - f_t F_x}{F_t + f_t F_y}.$

## 习题 9-6 多元函数微分学的几何应用

1. 设  $f(t) = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k, g(t) = g_1(t)i + g_2(t)j + g_3(t)k,$   
 $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = u, \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = v,$  证明  $\lim_{t \rightarrow t_0} [f(t) \times g(t)] = u \times v.$

证

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [f(t) \times g(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow t_0} (f_2(t)g_3(t) - f_3(t)g_2(t), f_3(t)g_1(t) - f_1(t)g_3(t), \\
&\quad f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t)) \\
&= (\lim_{t \rightarrow t_0} [f_2(t)g_3(t) - f_3(t)g_2(t)], \lim_{t \rightarrow t_0} [f_3(t)g_1(t) - \\
&\quad f_1(t)g_3(t)], \lim_{t \rightarrow t_0} [f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t)]) \\
&= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) & \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) & \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) \\ \lim_{t \rightarrow t_0} g_1(t) & \lim_{t \rightarrow t_0} g_2(t) & \lim_{t \rightarrow t_0} g_3(t) \end{vmatrix} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}.
\end{aligned}$$

这个结果表明:两个向量值函数的向量积的极限等于它们各自的极限(向量)的向量积,即

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t)] = [\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t)] \times [\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{g}(t)].$$

2. 下列各题中,  $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t)$  是空间中的质点  $M$  在时刻  $t$  的位置, 求质点  $M$  在时刻  $t_0$  的速度向量和加速度向量, 以及在任意时刻  $t$  的速率.

(1)  $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = (t+1)\mathbf{i} + (t^2-1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, t_0 = 1;$

(2)  $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}, t_0 = \frac{\pi}{2};$

(3)  $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = [2\ln(t+1)]\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}, t_0 = 1.$

解 (1) 速度向量  $\mathbf{v}_0 = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=1} = (i + 2tj + 2k) \Big|_{t=1} = i + 2j + 2k,$

加速度向量  $\mathbf{a}_0 = \left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_{t=1} = 2j,$

速率  $|\mathbf{v}(t)| = |i + 2tj + 2k| = \sqrt{5 + 4t^2}.$

(2) 速度向量  $\mathbf{v}_0 = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=\frac{\pi}{2}} = [(-2\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}]_{t=\frac{\pi}{2}} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{k},$

加速度向量  $\mathbf{a}_0 = \left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_{t=\frac{\pi}{2}} = [(-2\cos t)\mathbf{i} - (3\sin t)\mathbf{j}]_{t=\frac{\pi}{2}} = -3\mathbf{j},$

速率  $|\mathbf{v}(t)| = |(-2\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}| = \sqrt{9\cos^2 t + 4\sin^2 t + 16}$   
 $= \sqrt{20 + 5\cos^2 t}.$

(3) 速度向量  $\mathbf{v}_0 = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=1} = \left( \frac{2}{t+1}\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \right) \Big|_{t=1} = i + 2j + k,$

加速度向量  $\mathbf{a}_0 = \left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_{t=1} = \left[ -\frac{2}{(t^2+1)^2}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \right]_{t=1} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k},$

速率  $|\mathbf{v}(t)| = \left| \frac{2}{t+1}\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \right| = \sqrt{5t^2 + \frac{4}{(t+1)^2}}.$

3. 求曲线  $r=f(t)=(t-\sin t)i+(1-\cos t)j+(4\sin \frac{t}{2})k$  在与  $t_0=\frac{\pi}{2}$  相应的点处的切线及法平面方程.

解 与  $t_0=\frac{\pi}{2}$  相应的点为  $(\frac{\pi}{2}-1, 1, 2\sqrt{2})$ , 曲线在该点处的切向量为  $T=f'(t_0)=(1, 1, \sqrt{2})$ , 于是所求切线方程为

$$\frac{x-(\frac{\pi}{2}-1)}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

法平面方程为

$$1 \cdot (x - \frac{\pi}{2} + 1) + 1 \cdot (y - 1) + \sqrt{2}(z - 2\sqrt{2}) = 0,$$

即 
$$x + y + \sqrt{2}z = \frac{\pi}{2} + 4.$$

4. 求曲线  $x=\frac{t}{1+t}, y=\frac{1+t}{t}, z=t^2$  在对应于  $t=1$  的点处的切线及法平面方程.

解 曲线在对应于  $t=1$  的点为  $(\frac{1}{2}, 2, 1)$ , 该点处的切向量

$$T=(x'(1), y'(1), z'(1))=(\frac{1}{(1+t)^2}, -\frac{1}{t^2}, 2t)\Big|_{t=1}=(\frac{1}{4}, -1, 2),$$

于是曲线在该点处的切线方程为

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2},$$

即 
$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1}{8}.$$

所求法平面方程为

$$\frac{1}{4}(x - \frac{1}{2}) - (y - 2) + 2(z - 1) = 0,$$

即 
$$2x - 8y + 16z - 1 = 0.$$

5. 求曲线  $y^2=2mx, z^2=m-x$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处的切线及法平面方程.

解 设曲线的参数方程中的参数为  $x$ , 将方程  $y^2=2mx$  和  $z^2=m-x$  两端分别对  $x$  求导, 得

$$2y \frac{dy}{dx} = 2m, 2z \frac{dz}{dx} = -1, \text{ 即 } \frac{dy}{dx} = \frac{m}{y}, \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2z}.$$

所以曲线在点  $(x_0, y_0, z_0)$  的切向量为

$$T = \left(1, \frac{m}{y_0}, -\frac{1}{2z_0}\right).$$

于是在点 $(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{\frac{m}{y_0}} = \frac{z-z_0}{-\frac{1}{2z_0}}.$$

法平面方程为  $(x-x_0) + \frac{m}{y_0}(y-y_0) - \frac{1}{2z_0}(z-z_0) = 0$ .

6. 求曲线  $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$  在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程.

解法一 为了求  $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ , 在所给方程两端分别对  $x$  求导, 得

$$\begin{cases} 2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} - 3 = 0, \\ 2 - 3 \frac{dy}{dx} + 5 \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = -2x + 3, \\ 3 \frac{dy}{dx} - 5 \frac{dz}{dx} = 2. \end{cases}$$

当  $D = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10y - 6z \neq 0$  时, 解方程组得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} -2x+3 & 2z \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = \frac{10x-4z-15}{-10y-6z},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 2y & -2x+3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{6x+4y-9}{-10y-6z}.$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,1,1)} = \frac{9}{16}, \quad \left. \frac{dz}{dx} \right|_{(1,1,1)} = -\frac{1}{16}.$$

于是在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程为  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{\frac{9}{16}} = \frac{z-1}{-\frac{1}{16}},$

即  $\frac{x-1}{16} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-1}.$

法平面方程为  $(x-1) + \frac{9}{16}(y-1) - \frac{1}{16}(z-1) = 0,$

即  $16x + 9y - z - 24 = 0.$

解法二 所求曲线的切线, 也就是曲面  $x^2+y^2+z^2-3x=0$  在点 $(1,1,1)$ 处的切平面与平面  $2x-3y+5z=4$  的交线, 利用曲面的切平面方程得所求切线为

$$\begin{cases} -(x-1)+2(y-1)+2(z-1)=0, \\ 2x-3y+5z=4. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -x+2y+2z=3, \\ 2x-3y+5z=4. \end{cases}$$

这切线的方向向量为 $(16, 9, -1)$ , 于是所求法平面方程为

$$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0,$$

即

$$16x+9y-z-24=0.$$

7. 求出曲线  $x=t, y=t^2, z=t^3$  上的点, 使在该点的切线平行于平面  $x+2y+z=4$ .

解 因为  $x'_t=1, y'_t=2t, z'_t=3t^2$ , 设所求点对应的参数为  $t_0$ , 于是曲线在该点处的切向量可取为  $T=(1, 2t_0, 3t_0^2)$ . 已知平面的法向量为  $n=(1, 2, 1)$ , 由切线与平面平行, 得  $T \cdot n=0$ , 即  $1+4t_0+3t_0^2=0$ , 解得  $t_0=-1$  和  $-\frac{1}{3}$ . 于是所求

点为  $(-1, 1, -1)$  或  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27})$ .

8. 求曲面  $e^z-z+xy=3$  在点  $(2, 1, 0)$  处的切平面及法线方程.

解 令  $F(x, y, z)=e^z-z+xy-3$ , 则

$$n=(F_x, F_y, F_z)=(y, x, e^z-1), n|_{(2,1,0)}=(1, 2, 0).$$

曲面在点  $(2, 1, 0)$  处的切平面方程为

$$1 \cdot (x-2)+2(y-1)+0 \cdot (z-0)=0,$$

即

$$x+2y-4=0.$$

曲面在点  $(2, 1, 0)$  处的法线方程为

$$\begin{cases} \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}, \\ z=0. \end{cases}$$

9. 求曲面  $ax^2+by^2+cz^2=1$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处的切平面及法线方程.

解 令  $F(x, y, z)=ax^2+by^2+cz^2-1$ , 则曲面在点  $(x, y, z)$  处的一个法向量

$$\begin{aligned} n &= (F_x, F_y, F_z) = (2ax, 2by, 2cz) \\ &= 2(ax, by, cz), \end{aligned}$$

在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处的一个法向量为  $(ax_0, by_0, cz_0)$ , 故曲面在该点处的切平面方程为

$$ax_0(x-x_0)+by_0(y-y_0)+cz_0(z-z_0)=0,$$

即

$$ax_0x+by_0y+cz_0z=ax_0^2+by_0^2+cz_0^2=1.$$

法线方程为 
$$\frac{x-x_0}{ax_0} = \frac{y-y_0}{by_0} = \frac{z-z_0}{cz_0}.$$

10. 求椭球面  $x^2+2y^2+z^2=1$  上平行于平面  $x-y+2z=0$  的切平面方程.

解 设  $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$ , 则曲面在点  $(x, y, z)$  处的一个法向量  $\mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z) = (2x, 4y, 2z)$ . 已知平面的法向量为  $(1, -1, 2)$ , 由已知平面与所求切平面平行, 得

$$\frac{2x}{1} = \frac{4y}{-1} = \frac{2z}{2}, \text{ 即 } x = \frac{1}{2}z, y = -\frac{1}{4}z.$$

代入椭球面方程得 
$$\left(\frac{z}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{z}{4}\right)^2 + z^2 = 1.$$

解得  $z = \pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}$ , 则  $x = \pm\sqrt{\frac{2}{11}}, y = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}$ .

所以切点为 
$$\left(\pm\sqrt{\frac{2}{11}}, \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}, \pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}\right).$$

所求切平面方程为

$$\left(x \pm \sqrt{\frac{2}{11}}\right) - \left(y \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}\right) + 2\left(z \pm 2\sqrt{\frac{2}{11}}\right) = 0,$$

即 
$$x - y + 2z = \pm \sqrt{\frac{11}{2}}.$$

11. 求旋转椭球面  $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$  上点  $(-1, -2, 3)$  处的切平面与  $xOy$  面的夹角的余弦.

解 令  $F(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^2 - 16$ , 曲面的法向量为

$$\mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z) = (6x, 2y, 2z),$$

曲面在点  $(-1, -2, 3)$  处的法向量为  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}|_{(-1, -2, 3)} = (-6, -4, 6)$ ,  $xOy$  面的法向量为  $\mathbf{n}_2 = (0, 0, 1)$ , 记  $\mathbf{n}_1$  与  $\mathbf{n}_2$  的夹角为  $\gamma$ , 则所求的余弦值为

$$\cos \gamma = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 4^2 + 6^2} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{22}}.$$

12. 试证曲面  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} (a > 0)$  上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于  $a$ .

证 设  $F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a}$ , 则曲面在点  $(x, y, z)$  处的一个法向量

$$\mathbf{n} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}, \frac{1}{2\sqrt{z}}\right).$$

在曲面上任取一点  $M(x_0, y_0, z_0)$ , 则曲面在点  $M$  处的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0,$$

即 
$$\frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a},$$

化为截距式,得 
$$\frac{x}{\sqrt{ax_0}} + \frac{y}{\sqrt{ay_0}} + \frac{z}{\sqrt{az_0}} = 1,$$

所以截距之和为

$$\sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0} = \sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = a.$$

13. 设  $u(t), v(t)$  是可导的向量值函数, 证明:

(1)  $\frac{d}{dt}[u(t) \pm v(t)] = u'(t) \pm v'(t);$

(2)  $\frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t);$

(3)  $\frac{d}{dt}[u(t) \times v(t)] = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t).$

证 (1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[u(t) \pm v(t)] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[u(t+\Delta t) \pm v(t+\Delta t)] - [u(t) \pm v(t)]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} \pm \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = u'(t) \pm v'(t), \end{aligned}$$

其中用到了向量值函数的极限的四则运算法则。

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t+\Delta t) \cdot v(t+\Delta t) - u(t) \cdot v(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t+\Delta t) \cdot v(t+\Delta t) - u(t) \cdot v(t+\Delta t)}{\Delta t} + \\ &\quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t) \cdot v(t+\Delta t) - u(t) \cdot v(t)}{\Delta t} \\ &= \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} \right] \cdot \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v(t+\Delta t) \right] + \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} u(t) \right] \cdot \\ &\quad \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right] \\ &= u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t), \end{aligned}$$

其中用到了向量值函数极限的四则运算法则以及数量积与极限运算次序的交换。

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{d}{dt}[u(t) \times v(t)] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t+\Delta t) \times v(t+\Delta t) - u(t) \times v(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t+\Delta t) \times v(t+\Delta t) - u(t) \times v(t+\Delta t) + u(t) \times v(t+\Delta t) - u(t) \times v(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} \times v(t+\Delta t) \right] + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ u(t) \times \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right] \\ &= \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} \right] \times \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v(t+\Delta t) \right] + \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} u(t) \right] \times \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \right] \end{aligned}$$

$$= \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t),$$

其中用到了向量值函数极限的四则运算法则以及向量积与极限运算次序的交换.

## 习题9-7 方向导数与梯度

1. 求函数  $z = x^2 + y^2$  在点  $(1, 2)$  处沿从点  $(1, 2)$  到点  $(2, 2 + \sqrt{3})$  的方向的方向导数.

解 按题意, 方向  $l = (1, \sqrt{3})$ ,  $e_l = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

$$\text{又} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y, \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)} = 2, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,2)} = 4,$$

$$\text{故} \quad \frac{\partial z}{\partial l} \Big|_{(1,2)} = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3}.$$

2. 求函数  $z = \ln(x+y)$  在抛物线  $y^2 = 4x$  上点  $(1, 2)$  处, 沿着这抛物线在该点处偏向  $x$  轴正向的切线方向的方向导数.

解 先求切线斜率: 在  $y^2 = 4x$  两端分别对  $x$  求导, 得

$$2y \frac{dy}{dx} = 4.$$

$$\text{于是} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}, \quad k = \frac{dy}{dx} \Big|_{(1,2)} = 1,$$

$$\text{切线方向 } l = (1, 1), e_l = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\text{又} \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{x+y} \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{x+y} \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{故} \quad \frac{\partial z}{\partial l} \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

3. 求函数  $z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$  在点  $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$  处沿曲线  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  在这点的内法线方向的方向导数.

解 先求切线斜率: 在  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  两端分别对  $x$  求导, 得

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$\text{于是} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad k = \frac{dy}{dx} \Big|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)} = -\frac{b}{a},$$



法线斜率为

$$k' = -\frac{1}{k} = \frac{a}{b},$$

内法线方向  $l = (-b, -a)$ ,  $e_l = \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ .

又 
$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})} = -\frac{\sqrt{2}}{a}, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})} = -\frac{\sqrt{2}}{b}.$$

故 
$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial l} \Big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})} &= -\frac{\sqrt{2}}{a} \cdot \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{b} \cdot \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &= \frac{1}{ab} \sqrt{2(a^2+b^2)}. \end{aligned}$$

4. 求函数  $u = xy^2 + z^3 - xyz$  在点  $(1, 1, 2)$  处沿方向角为  $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{3}$

的方向的方向导数.

解 因为  $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 - yz, \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy - xz, \frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 - xy,$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,1,2)} = -1, \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(1,1,2)} = 0, \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(1,1,2)} = 11.$$

$$e_l = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

所以 
$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(1,1,2)} = -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 11 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

5. 求函数  $u = xyz$  在点  $(5, 1, 2)$  处沿从点  $(5, 1, 2)$  到点  $(9, 4, 14)$  的方向的方向导数.

解 按题意, 方向  $l = (4, 3, 12)$ ,  $e_l = \left(\frac{4}{13}, \frac{3}{13}, \frac{12}{13}\right)$ .

又 
$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \frac{\partial u}{\partial y} = xz, \frac{\partial u}{\partial z} = xy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(5,1,2)} = 2, \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(5,1,2)} = 10, \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(5,1,2)} = 5,$$

故 
$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(5,1,2)} = 2 \cdot \frac{4}{13} + 10 \cdot \frac{3}{13} + 5 \cdot \frac{12}{13} = \frac{98}{13}.$$

6. 求函数  $u = x^2 + y^2 + z^2$  在曲线  $x = t, y = t^2, z = t^3$  上点  $(1, 1, 1)$  处, 沿曲线在该点的切线正方向(对应于  $t$  增大的方向)的方向导数.

解 先求曲线在给定点的切线方向.

因为  $x'_t = 1, y'_t = 2t, z'_t = 3t^2$ , 所以曲线在点  $(1, 1, 1)$  处的切线的方向向量

可取为  $T = (1, 2, 3)$ ,  $e_T = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ .

$$\text{又} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(1,1,1)} = 2, \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(1,1,1)} = 2, \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{(1,1,1)} = 2,$$

$$\text{故} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{T}} \right|_{(1,1,1)} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{6}{7} \sqrt{14}.$$

7. 求函数  $u=x+y+z$  在球面  $x^2+y^2+z^2=1$  上点  $(x_0, y_0, z_0)$  处, 沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

解 设  $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-1$ , 则  $F_x=2x, F_y=2y, F_z=2z$ , 于是球面在  $(x_0, y_0, z_0)$  处的外法线方向向量可取为

$$\mathbf{l}=(F_x, F_y, F_z) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}=(2x_0, 2y_0, 2z_0),$$

$\mathbf{l}$  的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}, \cos \beta = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}, \cos \gamma = \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},$$

$$\text{又} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \frac{\partial u}{\partial z} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \\ &= 1 \cdot \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} + 1 \cdot \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} + 1 \cdot \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} \\ &= \frac{x_0+y_0+z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} \\ &= x_0+y_0+z_0. \end{aligned}$$

8. 设  $f(x, y, z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$ , 求  $\text{grad} f(0, 0, 0)$  及  $\text{grad} f(1, 1, 1)$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{grad} f(x, y, z) &= f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} \\ &= (2x+y+3)\mathbf{i} + (4y+x-2)\mathbf{j} + (6z-6)\mathbf{k}, \\ \text{grad} f(0, 0, 0) &= 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}, \\ \text{grad} f(1, 1, 1) &= 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}. \end{aligned}$$

9. 设函数  $u(x, y, z), v(x, y, z)$  的各个偏导数都存在且连续, 证明:

- (1)  $\nabla(Cu) = C \nabla u$  (其中  $C$  为常数);
- (2)  $\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v$ ;
- (3)  $\nabla(uv) = v \nabla u + u \nabla v$ ;
- (4)  $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2}$ .

$$\text{证} \quad (1) \quad \nabla(Cu) = \left( C \frac{\partial u}{\partial x}, C \frac{\partial u}{\partial y}, C \frac{\partial u}{\partial z} \right) = C \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$=C \nabla u.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \nabla(u \pm v) &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \pm \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \pm \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \pm \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= \nabla u \pm \nabla v. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \nabla(uv) &= \left( \frac{\partial}{\partial x}(uv), \frac{\partial}{\partial y}(uv), \frac{\partial}{\partial z}(uv) \right) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x}v + u \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}v + u \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}v + u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= v \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) + u \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= v \nabla u + u \nabla v. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \nabla \left( \frac{u}{v} \right) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u}{v} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u}{v} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u}{v} \right) \right) \\ &= \left( \frac{v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}, \frac{v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y}}{v^2}, \frac{v \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial z}}{v^2} \right) \\ &= \frac{1}{v} \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{u}{v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2}. \end{aligned}$$

10. 求函数  $u = xy^2z$  在点  $P_0(1, -1, 2)$  处变化最快的方向, 并求沿这个方向的方向导数.

解 
$$\begin{aligned} \nabla u &= \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} = y^2 z \mathbf{i} + 2xy z \mathbf{j} + xy^2 \mathbf{k}, \\ \nabla u \Big|_{P_0} &= 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}. \end{aligned}$$

由方向导数与梯度的关系可知,  $u = xy^2z$  在  $P_0$  处沿  $\mathbf{n} = \nabla u \Big|_{P_0} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$  的方向增加最快, 其方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{P_0} = |\nabla u \Big|_{P_0}| = |2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{21};$$

沿  $\mathbf{n}_1 = -\nabla u \Big|_{P_0} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$  方向减少最快, 其方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} \Big|_{P_0} = -\sqrt{21}.$$

## 习题 9-8

## 多元函数的极值及其求法

1. 已知函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  的某个邻域内连续, 且

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1,$$

则下述四个选项中正确的是( ).

- (A) 点(0,0)不是  $f(x,y)$  的极值点.  
 (B) 点(0,0)是  $f(x,y)$  的极大值点.  
 (C) 点(0,0)是  $f(x,y)$  的极小值点.  
 (D) 根据所给条件无法判断(0,0)是否为  $f(x,y)$  的极值点.

解 令  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 则由题意可知

$$f(x,y) = xy + \rho^4 + o(\rho^4),$$

当  $(x,y) \rightarrow (0,0)$  时,  $\rho \rightarrow 0$ .

由于  $f(x,y)$  在  $(0,0)$  附近的值主要由  $xy$  决定, 而  $xy$  在  $(0,0)$  附近符号不定, 故点(0,0)不是  $f(x,y)$  的极值点, 应选(A).

本题也可以取两条路径  $y=x$  和  $y=-x$  来考虑. 当  $|x|$  充分小时,

$$f(x,x) = x^2 + 4x^4 + o(x^4) > 0,$$

$$f(x,-x) = -x^2 + 4x^4 + o(x^4) < 0,$$

故点(0,0)不是  $f(x,y)$  的极值点, 应选(A).

2. 求函数  $f(x,y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$  的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x = 4 - 2x = 0, \\ f_y = -4 - 2y = 0, \end{cases}$$

求得驻点(2, -2).

$$\text{又 } A = f_{xx}(2, -2) = -2 < 0, B = f_{xy}(2, -2) = 0,$$

$$C = f_{yy}(2, -2) = -2, \quad AC - B^2 = 4 > 0,$$

由判定极值的充分条件知: 在点(2, -2)处, 函数取得极大值  $f(2, -2) = 8$ .

3. 求函数  $f(x,y) = (6x - x^2)(4y - y^2)$  的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x = (6 - 2x)(4y - y^2) = 0, \\ f_y = (6x - x^2)(4 - 2y) = 0. \end{cases}$$

求得以下五组解:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_3 = 3, \\ y_3 = 2, \end{cases} \begin{cases} x_4 = 6, \\ y_4 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_5 = 6, \\ y_5 = 4. \end{cases}$$

于是, 得驻点(0,0), (0,4), (3,2), (6,0), (6,4).

$$\text{又 } f_{xx}(x,y) = -2(4y - y^2),$$

$$f_{xy}(x,y) = 4(3 - x)(2 - y),$$

$$f_{yy}(x,y) = -2(6x - x^2).$$

由判定极值的充分条件知:

在点 $(0,0)$ 处,  $A=f_{xx}(0,0)=0, B=f_{xy}(0,0)=24, C=f_{yy}(0,0)=0$ ,  
 $AC-B^2=-24^2<0$ , 故  $f(0,0)$  不是极值;

在点 $(0,4)$ 处,  $A=f_{xx}(0,4)=0, B=f_{xy}(0,4)=-24, C=f_{yy}(0,4)=0$ ,  
 $AC-B^2=-24^2<0$ , 故  $f(0,4)$  不是极值;

在点 $(3,2)$ 处,  $A=f_{xx}(3,2)=-8<0, B=f_{xy}(3,2)=0, C=f_{yy}(3,2)=-18$ ,  
 $AC-B^2=144>0$ , 故函数在点 $(3,2)$ 处取得极大值, 极大值为  $f(3,2)=36$ ;

在点 $(6,0)$ 处,  $A=f_{xx}(6,0)=0, B=f_{xy}(6,0)=-24, C=f_{yy}(6,0)=0$ ,  
 $AC-B^2=-24^2<0$ , 故  $f(6,0)$  不是极值;

在点 $(6,4)$ 处,  $A=f_{xx}(6,4)=0, B=f_{xy}(6,4)=24, C=f_{yy}(6,4)=0$ ,  
 $AC-B^2=-24^2<0$ , 故  $f(6,4)$  不是极值.

4. 求函数  $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$  的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x = e^{2x}(2x+2y^2+4y+1) = 0, \\ f_y = e^{2x}(2y+2) = 0, \end{cases}$$

求得驻点  $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ .

又  $A=f_{xx}\left(\frac{1}{2}, -1\right)=2e>0, B=f_{xy}\left(\frac{1}{2}, -1\right)=0, C=f_{yy}\left(\frac{1}{2}, -1\right)=2e$ ,  
 $AC-B^2=4e^2>0$ ,

由判定极值的充分条件知, 在点 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 处, 函数取得极小值

$$f\left(\frac{1}{2}, -1\right)=-\frac{e}{2}.$$

5. 求函数  $z=xy$  在适合附加条件  $x+y=1$  下的极大值.

解 本题属条件极值问题, 易将它化为无条件极值问题.

条件  $x+y=1$  可表示成  $y=1-x$ , 代入  $z=xy$ , 则问题化为求  $z=x(1-x)$  的极大值.

由  $\frac{dz}{dx}=1-2x=0$ , 得  $x=\frac{1}{2}$ .

又  $\frac{d^2z}{dx^2}\bigg|_{x=\frac{1}{2}}=-2<0$ .

由一元函数取得极值的充分条件知,  $x=\frac{1}{2}$  为极大值点, 极大值为

$$z=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

6. 从斜边之长为  $l$  的一切直角三角形中, 求有最大周长的直角三角形.

解 设直角三角形的两直角边之长分别为  $x, y$ , 则周长

$$S = x + y + l \quad (0 < x < l, 0 < y < l).$$

本题是求周长  $S$  在  $x^2 + y^2 = l^2$  条件下的条件极值问题.

作拉格朗日函数

$$L(x, y) = x + y + l + \lambda(x^2 + y^2 - l^2).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 1 + 2\lambda x = 0, \\ L_y = 1 + 2\lambda y = 0. \end{cases}$$

解得  $x = y = -\frac{1}{2\lambda}$ . 代入  $x^2 + y^2 = l^2$ , 得  $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2l}$ , 于是  $x = y = \frac{l}{\sqrt{2}}$ ,  $(\frac{l}{\sqrt{2}}, \frac{l}{\sqrt{2}})$  是惟

一可能的极值点, 根据问题性质可知这种最大周长的直角三角形一定存在, 所以在斜边之长为  $l$  的一切直角三角形中, 周长最大的是等腰直角三角形.

注 条件极值的解法, 一般是采用拉格朗日乘数法求解. 但要注意利用乘数法所得到的点只是可能极值点, 究竟这些点是否极值点以及是极大点还是极小点尚需进一步判断. 在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定. 在特殊情形下, 条件极值问题可化为无条件极值问题求解.

7. 要造一个容积等于定数  $k$  的长方体无盖水池, 应如何选择水池的尺寸, 方可使它的表面积最小.

解 设水池的长为  $a$ , 宽为  $b$ , 高为  $c$ , 则水池的表面积为

$$A = ab + 2ac + 2bc \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

约束条件  $abc = k$ .

作拉格朗日函数  $L(a, b, c) = ab + 2ac + 2bc + \lambda(abc - k)$ .

由

$$\begin{cases} L_a = b + 2c + \lambda bc = 0, \\ L_b = a + 2c + \lambda ac = 0, \\ L_c = 2a + 2b + \lambda ab = 0, \\ abc = k, \end{cases}$$

解得  $a = b = \sqrt[3]{2k}$ ,  $c = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$ ,  $\lambda = -\sqrt[3]{\frac{32}{k}}$ .

$(\sqrt[3]{2k}, \sqrt[3]{2k}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2k})$  是惟一可能的极值点, 由问题本身可知  $A$  一定有最小

值, 所以表面积最小的水池的长和宽都应  $\sqrt[3]{2k}$ , 高为  $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$ .

8. 在平面  $xOy$  上求一点, 使它到  $x=0, y=0$  及  $x+2y-16=0$  三直线的距离平方之和为最小.

解 设所求点为  $(x, y)$ , 则此点到三直线的距离依次为:  $|y|, |x|, \frac{|x+2y-16|}{\sqrt{5}}$ , 三距离平方之和为

$$z = x^2 + y^2 + \frac{1}{5}(x+2y-16)^2.$$

由

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \frac{2}{5}(x+2y-16) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \frac{4}{5}(x+2y-16) = 0 \end{cases}$$

求得惟一可能的极值点  $(\frac{8}{5}, \frac{16}{5})$ . 根据问题本身可知, 距离平方和最小的点必定存在, 故所求点即为  $(\frac{8}{5}, \frac{16}{5})$ .

9. 将周长为  $2p$  的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体. 问矩形的边长各为多少时, 才可使圆柱体的体积为最大?

解 设矩形的一边长为  $x$ , 则另一边长为  $p-x$ , 假设矩形绕长为  $p-x$  的一边旋转, 则旋转所成圆柱体的体积为  $V = \pi x^2(p-x)$ . 由

$$\frac{dV}{dx} = 2\pi x(p-x) - \pi x^2 = \pi x(2p-3x) = 0,$$

求得驻点为  $x = \frac{2}{3}p$ .

由于驻点惟一, 由题意又可知这种圆柱体一定有最大值, 所以当矩形的边长为  $\frac{2p}{3}$  和  $\frac{p}{3}$  时, 绕短边旋转所得圆柱体体积最大.

10. 求内接于半径为  $a$  的球且有最大体积的长方体.

解 设球面方程为  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $(x, y, z)$  是它的内接长方体在第一卦限内的一个顶点, 则此长方体的长、宽、高分别为  $2x, 2y, 2z$ , 体积为

$$V = 2x \cdot 2y \cdot 2z = 8xyz.$$

令  $L(x, y, z) = 8xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)$ ,

$$\text{由 } \begin{cases} L_x = 8yz + 2\lambda x = 0, \\ L_y = 8xz + 2\lambda y = 0, \\ L_z = 8xy + 2\lambda z = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 4yz + \lambda x = 0, \\ 4xz + \lambda y = 0, \\ 4xy + \lambda z = 0, \end{cases}$$

解得  $x=y=z=-\frac{\lambda}{4}$ , 代入  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , 得  $\lambda = -\frac{4}{\sqrt{3}}a$ , 故  $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}})$  为惟一可能的极值点, 由于内接于球且有最大体积的长方体必定存在, 所以当长方体

的长、宽、高都为  $\frac{2a}{\sqrt{3}}$  时其体积最大.

11. 抛物面  $z=x^2+y^2$  被平面  $x+y+z=1$  截成一椭圆, 求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值.

解 设椭圆上的点为  $(x, y, z)$ , 则椭圆上的点到原点的距离平方为

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

$x, y, z$  满足条件:  $z=x^2+y^2, x+y+z=1$ .

作拉格朗日函数

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z - x^2 - y^2) + \mu(x + y + z - 1).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 2x - 2\lambda x + \mu = 0, & (1) \\ L_y = 2y - 2\lambda y + \mu = 0, & (2) \\ L_z = 2z + \lambda + \mu = 0. & (3) \end{cases}$$

(1)-(2), 得  $(1-\lambda)(x-y)=0$ .

故有  $\lambda=1$  或  $x=y$ .

由  $\lambda=1 \Rightarrow \mu=0, z=-\frac{1}{2}$ , 不合题意, 故舍去.

将  $x=y$  代入  $z=x^2+y^2$  和  $x+y+z=1$ , 得

$$z = 2x^2, 2x + z = 1 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0.$$

解得  $x = y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, z = 2 \mp \sqrt{3}$ .

于是得到两个可能的极值点:

$$M_1\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3}\right), M_2\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3}\right).$$

由题意可知这种距离的最大值和最小值一定存在, 所以距离的最大值和最小值分别在这两点处取得. 而

$$2\left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}\right)^2 + (2 \mp \sqrt{3})^2 = 9 \mp 5\sqrt{3},$$

故最大值与最小值分别为

$$d_{\max} = d_{M_2} = \sqrt{9+5\sqrt{3}}, d_{\min} = d_{M_1} = \sqrt{9-5\sqrt{3}}.$$

12. 设有一圆板占有平面闭区域  $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ . 该圆板被加热, 以致在点  $(x, y)$  的温度是

$$T = x^2 + 2y^2 - x,$$

求该圆板的最热点和最冷点.

解 解方程组



$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 2x - 1 = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 4y = 0, \end{cases}$$

求得驻点  $(\frac{1}{2}, 0)$ .  $T_1 = T|_{(\frac{1}{2}, 0)} = -\frac{1}{4}$ .

$$\text{在边界 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 上, } T = 2 - (x^2 + x) = \frac{9}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2,$$

当  $x = -\frac{1}{2}$  时, 有边界上的最大值  $T_2 = \frac{9}{4}$ ,  $x = 1$  时, 有边界上的最小值  $T_3 = 0$ .

比较  $T_1, T_2$  及  $T_3$  的值知, 最热点在  $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $T_{\max} = \frac{9}{4}$ , 最冷点在  $(\frac{1}{2}, 0)$ ,  $T_{\min} = -\frac{1}{4}$ .

13. 形状为椭球  $4x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 16$  的空间探测器进入地球大气层, 其表面开始受热, 1 小时后在探测器的点  $(x, y, z)$  处的温度  $T = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$ , 求探测器表面最热的点.

解 作拉格朗日函数

$$L = 8x^2 + 4yz - 16z + 600 + \lambda(4x^2 + y^2 + 4z^2 - 16).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 16x + 8\lambda x = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} L_y = 4z + 2\lambda y = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} L_z = 4y - 16 + 8\lambda z = 0. \end{cases} \quad (3)$$

由(1)得  $x=0$  或  $\lambda=-2$ .

若  $\lambda=-2$ , 代入(2)、(3), 得  $y=z=-\frac{4}{3}$ . 再将  $y=z=-\frac{4}{3}$  代入约束条件

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16, \quad (4)$$

得  $x = \pm \frac{4}{3}$ . 于是得到两个可能的极值点:  $M_1(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ ,  $M_2(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ .

若  $x=0$ , 由(2)、(3)、(4)解得  $\lambda=0, y=4, z=0$ ;  $\lambda=\sqrt{3}, y=-2, z=\sqrt{3}$ ;  $\lambda=-\sqrt{3}, y=-2, z=-\sqrt{3}$ . 于是得到另外三个可能极值点:  $M_3(0, 4, 0)$ ,  $M_4(0, -2, \sqrt{3})$ ,  $M_5(0, -2, -\sqrt{3})$ .

比较  $T$  在上述五个可能极值点处的数值知:  $T|_{M_1} = T|_{M_2} = \frac{1928}{3}$  为最大, 故探测器表面最热的点为  $M(\pm\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ .

1. 求函数  $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$  在点  $(1, -2)$  的泰勒公式.

解  $f(1, -2) = 5, f_x(1, -2) = (4x - y - 6)|_{(1, -2)} = 0,$

$$f_y(1, -2) = (-x - 2y - 3)|_{(1, -2)} = 0,$$

$$f_{xx}(1, -2) = 4, f_{xy}(1, -2) = -1, f_{yy}(1, -2) = -2.$$

函数为 2 次多项式, 3 阶及 3 阶以上的各偏导数均为零. 又

$$h = x - 1, k = y + 2.$$

将以上各项代入泰勒公式, 便得

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(1, -2) + (x-1)f_x(1, -2) + (y+2)f_y(1, -2) + \frac{1}{2!}[(x-1)^2 \cdot \\ &\quad f_{xx}(1, -2) + 2(x-1)(y+2)f_{xy}(1, -2) + (y+2)^2 f_{yy}(1, -2)] \\ &= 5 + \frac{1}{2}[4(x-1)^2 - 2(x-1)(y+2) - 2(y+2)^2] \\ &= 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2. \end{aligned}$$

2. 求函数  $f(x, y) = e^x \ln(1+y)$  在点  $(0, 0)$  的三阶泰勒公式.

解  $f_x(x, y) = e^x \ln(1+y), f_y(x, y) = \frac{e^x}{1+y},$

$$f_{xx}(x, y) = e^x \ln(1+y), f_{xy}(x, y) = \frac{e^x}{1+y},$$

$$f_{yy}(x, y) = -\frac{e^x}{(1+y)^2}, f_{xxx}(x, y) = e^x \ln(1+y),$$

$$f_{yyy}(x, y) = \frac{2e^x}{(1+y)^3}.$$

于是  $(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}) f(0, 0) = h f_x(0, 0) + k f_y(0, 0) = k,$

$$\begin{aligned} (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^2 f(0, 0) &= h^2 f_{xx}(0, 0) + 2hk f_{xy}(0, 0) + k^2 f_{yy}(0, 0) \\ &= 2hk - k^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^3 f(0, 0) &= h^3 f_{xxx}(0, 0) + 3h^2 k f_{xxy}(0, 0) + 3hk^2 f_{xyy}(0, 0) + \\ &\quad k^3 f_{yyy}(0, 0) \\ &= 3h^2 k - 3hk^2 + 2k^3. \end{aligned}$$

又  $f(0, 0) = 0, h = x, k = y.$

将以上各项代入三阶泰勒公式, 便得

$$e^x \ln(1+y) = y + \frac{1}{2!}(2xy - y^2) + \frac{1}{3!}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3) + R_3,$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } R_3 &= \frac{1}{4!} \left[ \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 f(\theta h, \theta k) \right]_{h=x, k=y} \\ &= \frac{e^\theta}{24} \left[ x^4 \ln(1+\theta y) + \frac{4x^3 y}{1+\theta y} - \frac{6x^2 y^2}{(1+\theta y)^2} + \frac{8xy^3}{(1+\theta y)^3} - \frac{6y^4}{(1+\theta y)^4} \right], (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

3. 求函数  $f(x, y) = \sin x \sin y$  在点  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  的二阶泰勒公式.

$$\begin{aligned} \text{解 } f_x(x, y) &= \cos x \sin y, & f_y(x, y) &= \sin x \cos y, \\ f_{xx}(x, y) &= -\sin x \sin y, & f_{xy}(x, y) &= \cos x \cos y, \\ f_{yy}(x, y) &= -\sin x \sin y, & f_{yx}(x, y) &= -\cos x \sin y, \\ f_{xy}(x, y) &= -\sin x \cos y, & f_{yx}(x, y) &= -\cos x \sin y, \\ f_{yyy}(x, y) &= -\sin x \cos y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) &= h f_x\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + k f_y\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}k, \\ \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) &= h^2 f_{xx}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + 2hk f_{xy}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + k^2 f_{yy}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{2}h^2 + hk - \frac{1}{2}k^2. \end{aligned}$$

$$\text{又 } f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}, h = x - \frac{\pi}{4}, k = y - \frac{\pi}{4}.$$

将以上各项代入二阶泰勒公式, 便得

$$\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2!} \left[ -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 \right] + R_2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4} \left[ \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \right. \\ &\quad \left. 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 \right] + R_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } R_2 &= \frac{1}{3!} \left[ \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(\xi, \eta) \right]_{h=x-\frac{\pi}{4}, k=y-\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{1}{6} \left[ \cos \xi \sin \eta \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + 3 \sin \xi \cos \eta \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ &\quad \left. 3 \cos \xi \sin \eta \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \sin \xi \cos \eta \cdot \left(y - \frac{\pi}{4}\right)^3 \right], \\ &\quad \xi = \frac{\pi}{4} + \theta \left(x - \frac{\pi}{4}\right), \eta = \frac{\pi}{4} + \theta \left(y - \frac{\pi}{4}\right), 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

4. 利用函数  $f(x, y) = x^y$  的三阶泰勒公式, 计算  $1.1^{1.02}$  的近似值.

解 先求函数  $f(x, y) = x^y$  在点  $(1, 1)$  的三阶泰勒公式.

$$\begin{aligned}
 f_x(1,1) &= yx^{y-1}|_{(1,1)} = 1, f_y(1,1) = x^y \ln x|_{(1,1)} = 0, \\
 f_{xx}(1,1) &= y(y-1)x^{y-2}|_{(1,1)} = 0, \\
 f_{xy}(1,1) &= (x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x)|_{(1,1)} = 1, \\
 f_{yy}(1,1) &= x^y \ln^2 x|_{(1,1)} = 0, f_{xx}(1,1) = y(y-1)(y-2)x^{y-3}|_{(1,1)} = 0, \\
 f_{xy}(1,1) &= [(2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2} \ln x]|_{(1,1)} = 1, \\
 f_{yy}(1,1) &= [2x^{y-1} \ln x + yx^{y-1} \ln^2 x]|_{(1,1)} = 0, \\
 f_{yyy}(1,1) &= x^y \ln^3 x|_{(1,1)} = 0.
 \end{aligned}$$

又  $f(1,1) = 1, h = x-1, k = y-1.$

将以上各项代入三阶泰勒公式, 使得

$$\begin{aligned}
 x^y &= 1 + (x-1) + \frac{1}{2!}[2(x-1)(y-1)] + \frac{1}{3!}[3(x-1)^2(y-1)] + R_3 \\
 &= 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1) + R_3.
 \end{aligned}$$

因此  $1.1^{1.02} \approx 1 + 0.1 + 0.1 \times 0.02 + \frac{1}{2} \times 0.1^2 \times 0.02$   
 $= 1 + 0.1 + 0.002 + 0.0001 = 1.1021.$

5. 求函数  $f(x, y) = e^{x+y}$  在点  $(0, 0)$  的  $n$  阶泰勒公式.

解  $f(0, 0) = 1, f_x(0, 0) = e^{x+y}|_{(0,0)} = 1, f_y(0, 0) = e^{x+y}|_{(0,0)} = 1, \dots,$   
 $f_{x^m y^n}^{(n)}(0, 0) = e^{x+y}|_{(0,0)} = 1 \quad (m=0, 1, \dots, n).$

又  $h = x, k = y.$

将以上各项代入  $n$  阶泰勒公式, 使得

$$\begin{aligned}
 e^{x+y} &= 1 + (x+y) + \frac{1}{2!}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{3!}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \\
 &+ \dots + \frac{1}{n!}(x+y)^n + R_n = \sum_{k=0}^n \frac{(x+y)^k}{k!} + R_n,
 \end{aligned}$$

其中  $R_n = \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta(x+y)} \quad (0 < \theta < 1).$

### 习题 9-10 最小二乘法

1. 某种合金的含铅量百分比(%)为  $p$ , 其溶解温度( $^{\circ}\text{C}$ )为  $\theta$ , 由实验测得  $p$  与  $\theta$  的数据如下表:

$p/\%$	36.9	46.7	63.7	77.8	84.0	87.5
$\theta/^{\circ}\text{C}$	181	197	235	270	283	292

试用最小二乘法建立  $\theta$  与  $p$  之间的经验公式  $\theta = ap + b$ .

解 设  $M$  是各个数据的偏差平方和, 即

$$M = \sum_{i=1}^6 [\theta_i - (ap_i + b)]^2.$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial a} = - \sum_{i=1}^6 2p_i [\theta_i - (ap_i + b)] = 0, \\ \frac{\partial M}{\partial b} = - \sum_{i=1}^6 2 [\theta_i - (ap_i + b)] = 0. \end{cases}$$

整理, 得

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^6 p_i^2 + b \sum_{i=1}^6 p_i = \sum_{i=1}^6 \theta_i p_i, \\ a \sum_{i=1}^6 p_i + 6b = \sum_{i=1}^6 \theta_i. \end{cases}$$

计算, 得  $\sum_{i=1}^6 p_i^2 = 28\,365.28$ ,  $\sum_{i=1}^6 p_i = 396.6$ ,  
 $\sum_{i=1}^6 \theta_i p_i = 101\,176.3$ ,  $\sum_{i=1}^6 \theta_i = 1\,458$ .

代入方程组, 得

$$\begin{cases} 28\,365.28a + 396.6b = 101\,176.3, \\ 396.6a + 6b = 1\,458. \end{cases}$$

解得

$$\begin{aligned} a &= \frac{4\,802.5}{2\,150.02} = 2.234, \\ b &= \frac{572.0}{6} = 95.33. \end{aligned}$$

所以经验公式为  $\theta = 2.234p + 95.33$ .

2. 已知一组实验数据为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . 现若假定经验公式是

$$y = ax^2 + bx + c.$$

试按最小二乘法建立  $a, b, c$  应满足的三元一次方程组.

解 设  $M$  是各个数据的偏差平方和, 即

$$M = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2.$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] \cdot x_i^2 = 0, \\ \frac{\partial M}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] \cdot x_i = 0, \\ \frac{\partial M}{\partial c} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0. \end{cases}$$

整理,得  $a, b, c$  应满足的三元一次方程组如下:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + nc = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

### 总习题九

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1)  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微分是  $f(x, y)$  在该点连续的\_\_\_\_\_条件.  $f(x, y)$  在点  $(x, y)$  连续是  $f(x, y)$  在该点可微分的\_\_\_\_\_条件.

(2)  $z=f(x, y)$  在点  $(x, y)$  的偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}$  及  $\frac{\partial z}{\partial y}$  存在是  $f(x, y)$  在该点可微分的\_\_\_\_\_条件.  $z=f(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微分是函数在该点的偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}$  及  $\frac{\partial z}{\partial y}$  存在的\_\_\_\_\_条件.

(3)  $z=f(x, y)$  的偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}$  及  $\frac{\partial z}{\partial y}$  在点  $(x, y)$  存在且连续是  $f(x, y)$  在该点可微分的\_\_\_\_\_条件.

(4) 函数  $z=f(x, y)$  的两个二阶混合偏导数  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  及  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  在区域  $D$  内连续是这两个二阶混合偏导数在  $D$  内相等的\_\_\_\_\_条件.

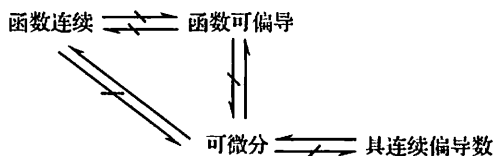
解 (1) 充分, 必要.

(2) 必要, 充分.

(3) 充分.

(4) 充分.

注 本题结果给出了二元函数连续、可偏导(两个偏导数均存在)、可微及具有连续偏导数之间的联系, 用图表可表示为



2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  的某邻域内有定义, 且  $f_x(0, 0)=3, f_y(0, 0)=-1$ , 则有\_\_\_\_\_.

(A)  $dz|_{(0,0)} = 3dx - dy$ .

(B) 曲面  $z=f(x,y)$  在点  $(0,0,f(0,0))$  的一个法向量为  $(3,-1,1)$ .

(C) 曲线  $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$  在点  $(0,0,f(0,0))$  的一个切向量为  $(1,0,3)$ .

(D) 曲线  $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$  在点  $(0,0,f(0,0))$  的一个切向量为  $(3,0,1)$ .

解 函数  $f(x,y)$  在点  $(0,0)$  处的两个偏导数存在, 不一定可微分, 故(A) 不对.

曲面  $z=f(x,y)$  在点  $(0,0,f(0,0))$  处的一个法向量是  $(3,-1,-1)$ , 而不是  $(3,-1,1)$ , 故(B) 不对.

取  $x$  为参数, 则曲线  $x=x, y=0, z=f(x,0)$  在点  $(0,0,f(0,0))$  处的一个切向量为  $(1,0,3)$ , 故(C) 正确.

3. 求函数  $f(x,y) = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$  的定义域, 并求  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)} f(x,y)$ .

解 函数的定义域为  $D = \{(x,y) | 0 < x^2 + y^2 < 1, y^2 \leq 4x\}$ .

因为点  $(\frac{1}{2}, 0) \in D$ ,  $f(x,y)$  为初等函数, 所以

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)} f(x,y) = f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{\ln \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\ln 3 - \ln 4}.$$

4. 证明极限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$  不存在.

证 取两条趋于  $(0,0)$  的路径,  $c_1: x=0, c_2: y^2=x$ .

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in c_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = 0;$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in c_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y^2=x}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}.$$

由于  $(x,y)$  分别沿  $c_1, c_2$  趋于  $(0,0)$  时  $f(x,y)$  的极限不相等, 故

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$  不存在.

5. 设

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

求  $f_x(x,y)$  及  $f_y(x,y)$ .

解 当  $x^2 + y^2 \neq 0$  时,

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy(x^2 + y^2) - x^2 y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2(x^2 + y^2) - x^2 y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

当  $x^2 + y^2 = 0$  时,

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0,$$

故

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

6. 求下列函数的一阶和二阶偏导数:

(1)  $z = \ln(x + y^2)$ ; (2)  $z = x^y$ .

解 (1)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x + y^2)^2},$   
 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x + y^2) - 4y^2}{(x + y^2)^2} = \frac{2(x - y^2)}{(x + y^2)^2},$   
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{x + y^2} \right) = -\frac{2y}{(x + y^2)^2}.$

(2)  $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2},$   
 $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x,$   
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (yx^{y-1}) = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x.$

7. 求函数  $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$  当  $x=2, y=1, \Delta x=0.01, \Delta y=0.03$  时的全增量和全

微分.

解  $\Delta z = \frac{(2.01) \cdot (1.03)}{(2.01)^2 - (1.03)^2} - \frac{2}{3} = 0.02.$

又  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(y^3 + x^2 y)}{(x^2 - y^2)^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3 + xy^2}{(x^2 - y^2)^2},$



$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2,1)} = -\frac{5}{9}, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(2,1)} = \frac{10}{9}.$$

故  $dz|_{\substack{x=2, \Delta x=0.01 \\ y=1, \Delta y=0.03}} = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(2,1)} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(2,1)} \cdot \Delta y = 0.03.$

\* 8. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

证明:  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处连续且偏导数存在, 但不可微分.

证 因为  $0 \leq \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2 + y^2},$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0,$$

所以

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0.$$

又  $f(0, 0) = 0$ , 故  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0)$ , 即  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处连续.

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

$$\Delta z - [f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y] = \frac{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}},$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = \Delta x}} \frac{\frac{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}}}{\rho} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^4}{[2(\Delta x)^2]^2} = \frac{1}{4} \neq 0,$$

故  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处偏导数存在, 但不可微分.

9. 设  $u = x^y$ , 而  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  都是可微函数, 求  $\frac{du}{dt}$ .

解  $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = yx^{y-1} \cdot \varphi'(t) + x^y \ln x \cdot \psi'(t).$

10. 设  $z = f(u, v, w)$  具有连续偏导数, 而

$$u = \eta - \zeta, v = \zeta - \xi, w = \xi - \eta,$$

求  $\frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta}$ .

解

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial w},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial w},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \zeta} = -\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

11. 设  $z=f(u, x, y), u=xe^y$ , 其中  $f$  具有连续的二阶偏导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

解 
$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= f_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_x = f_u \cdot e^y + f_x, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(f_u \cdot e^y + f_x) = \left(\frac{\partial}{\partial y} f_u\right) \cdot e^y + f_u \cdot e^y + \frac{\partial}{\partial y} f_x \\ &= \left(f_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f_{uy}\right) e^y + f_u \cdot e^y + \left(f_{xu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f_{xy}\right) \\ &= (f_{uu} \cdot xe^y + f_{uy}) e^y + f_u \cdot e^y + f_{xu} \cdot xe^y + f_{xy} \\ &= xe^{2y} f_{uu} + e^y f_{uy} + xe^y f_{xu} + f_{xy} + e^y f_u.\end{aligned}$$

12. 设  $x=e^u \cos v, y=e^u \sin v, z=uv$ , 试求  $\frac{\partial z}{\partial x}$  和  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

解 
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x}.$$

分别在  $x=e^u \cos v, y=e^u \sin v$  的两端对  $x$  求偏导数, 得

$$\begin{cases} e^u \cos v \frac{\partial u}{\partial x} - e^u \sin v \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \\ e^u \sin v \frac{\partial u}{\partial x} + e^u \cos v \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

由以上方程组解得  $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-u} \cos v, \frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-u} \sin v$ .

从而 
$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-u} (v \cos v - u \sin v).$$

同理 
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y}.$$

分别在  $x=e^u \cos v, y=e^u \sin v$  的两端对  $y$  求偏导数, 得

$$\begin{cases} e^u \cos v \frac{\partial u}{\partial y} - e^u \sin v \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ e^u \sin v \frac{\partial u}{\partial y} + e^u \cos v \frac{\partial v}{\partial y} = 1. \end{cases}$$

由以上方程组解得  $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-u} \sin v, \frac{\partial v}{\partial y} = e^{-u} \cos v$ .

从而 
$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-u} (u \cos v + v \sin v).$$

13. 求螺旋线  $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = b\theta$  在点  $(a, 0, 0)$  处的切线及法平面方程.

解 
$$\frac{dx}{d\theta} = -a \sin \theta, \frac{dy}{d\theta} = a \cos \theta, \frac{dz}{d\theta} = b.$$

点  $(a, 0, 0)$  所对应的参数  $\theta=0$ , 故曲线在给定点的切向量

$$T = (0, a, b).$$

于是切线方程为

$$\frac{x-a}{0} = \frac{y}{a} = \frac{z}{b},$$

即

$$\begin{cases} x=a, \\ by-az=0. \end{cases}$$

法平面方程为

$$a(y-0) + b(z-0) = 0,$$

即

$$ay + bz = 0.$$

14. 在曲面  $z=xy$  上求一点, 使这点处的法线垂直于平面  $x+3y+z+9=0$ , 并写出这法线的方程.

解 设所求点为  $M(x_0, y_0, z_0)$ , 曲面在该点处的一个法向量为  $n=(y_0, x_0, -1)$ , 平面的法向量为  $(1, 3, 1)$ .

按题意,  $n$  垂直于平面, 故有

$$\frac{y_0}{1} = \frac{x_0}{3} = \frac{-1}{1}.$$

求得  $x_0 = -3, y_0 = -1, z_0 = x_0 y_0 = 3$ . 于是所求点为  $M(-3, -1, 3)$ , 法线方程为

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

15. 设  $e_l = (\cos \theta, \sin \theta)$ , 求函数

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

在点  $(1, 1)$  沿方向  $l$  的方向导数, 并分别确定角  $\theta$ , 使这导数有 (1) 最大值, (2) 最小值, (3) 等于 0.

解  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y, \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y,$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,1)} = 1, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,1)} = 1.$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(1,1)} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,1)} \cos \theta + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,1)} \sin \theta = \cos \theta + \sin \theta.$$

因为  $\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \sin \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right),$

所以 (1) 当  $\theta = \frac{\pi}{4}$  时, 方向导数最大, 其最大值为  $\sqrt{2}$ .

(2) 当  $\theta = \frac{5}{4}\pi$  时, 方向导数最小, 其最小值为  $-\sqrt{2}$ .

(3) 当  $\theta = \frac{3}{4}\pi$  或  $\frac{7}{4}\pi$  时, 方向导数为 0.

16. 求函数  $u=x^2+y^2+z^2$  在椭球面  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$  上点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  处沿外法线方向的方向导数.

解 椭球面在点  $M_0$  处的沿外法线方向的一个向量为  $n = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right)$ ,

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}} \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right).$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial z}{\partial n} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}} \left(2x_0 \cdot \frac{x_0}{a^2} + 2y_0 \cdot \frac{y_0}{b^2} + 2z_0 \cdot \frac{z_0}{c^2}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}. \end{aligned}$$

17. 求平面  $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$  和柱面  $x^2 + y^2 = 1$  的交线上与  $xOy$  平面距离最短的点.

解 设交线上的点为  $M(x, y, z)$ , 它到  $xOy$  面上距离的平方为  $z^2$ . 问题就成为求函数  $z^2$  在约束条件  $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$  和  $x^2 + y^2 = 1$  下的最小值问题. 作拉格朗日函数

$$L = z^2 + \lambda \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} - 1\right) + \mu(x^2 + y^2 - 1).$$

令

$$\begin{cases} L_x = \frac{\lambda}{3} + 2\mu x = 0, \\ L_y = \frac{\lambda}{4} + 2\mu y = 0, \\ L_z = 2z + \frac{\lambda}{5} = 0. \end{cases}$$

又由约束条件, 有

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} &= 1, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

解此方程组, 得  $x = \frac{4}{5}, y = \frac{3}{5}, z = \frac{35}{12}$ . 于是, 得可能的极值点  $M_0\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{35}{12}\right)$ . 由问题本身可知, 距离最短的点必定存在, 因此  $M_0$  就是所求的点.

18. 在第一卦限内作椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的切平面, 使该切平面与三坐

标面所围成的四面体的体积最小. 求这切平面的切点, 并求此最小体积.

解 设切点为  $M(x_0, y_0, z_0)$ ,  $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ ,

$$\mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z) = \left( \frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right).$$

曲面在点  $M$  处的切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0,$$

即

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

于是, 切平面在三个坐标轴上的截距依次为  $\frac{a^2}{x_0}, \frac{b^2}{y_0}, \frac{c^2}{z_0}$ , 切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积为

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2 b^2 c^2}{x_0 y_0 z_0}.$$

在  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的条件下, 求  $V$  的最小值, 即求分母  $xyz$  的最大值. 作拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = xyz + \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right).$$

令

$$\begin{cases} L_x = yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_y = xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_z = xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0. & (3) \end{cases}$$

(1)  $\cdot$  x + (2)  $\cdot$  y + (3)  $\cdot$  z, 并由约束条件  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , 得

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3},$$

从而

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

于是, 得可能极值点  $M\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ . 由此问题的性质知, 所求的切点为

$M\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ , 四面体的最小体积为

$$V_{\text{最小}} = \frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

19. 某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售, 售价分别为  $p_1$  和  $p_2$ , 销售量分别为  $q_1$  和  $q_2$ , 需求函数分别为

$$q_1 = 24 - 0.2p_1, \quad q_2 = 10 - 0.05p_2,$$

总成本函数为

$$C = 35 + 40(q_1 + q_2).$$

试问: 厂家如何确定两个市场的售价, 能使其获得的总利润最大? 最大总利润为多少?

解法一 总收入函数为

$$R = p_1q_1 + p_2q_2 = 24p_1 - 0.2p_1^2 + 10p_2 - 0.05p_2^2,$$

总利润函数为

$$L = R - C = 32p_1 - 0.2p_1^2 - 0.05p_2^2 + 12p_2 - 1395.$$

由极值的必要条件, 得方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial p_1} = 32 - 0.4p_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial p_2} = 12 - 0.1p_2 = 0. \end{cases}$$

解此方程组, 得  $p_1 = 80, p_2 = 120$ .

由问题的实际意义可知, 厂家获得总利润最大的市场售价必定存在, 故当  $p_1 = 80, p_2 = 120$  时, 厂家所获得的总利润最大, 其最大总利润为

$$L \Big|_{p_1=80, p_2=120} = 605.$$

解法二 两个市场的价格函数分别为

$$p_1 = 120 - 5q_1, \quad p_2 = 200 - 20q_2,$$

总收入函数为

$$R = p_1q_1 + p_2q_2 = (120 - 5q_1)q_1 + (200 - 20q_2)q_2,$$

总利润函数为

$$\begin{aligned} L = R - C &= (120 - 5q_1)q_1 + (200 - 20q_2)q_2 - [35 + 40(q_1 + q_2)] \\ &= 80q_1 - 5q_1^2 + 160q_2 - 20q_2^2 - 35. \end{aligned}$$

由极值的必要条件, 得方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_1} = 80 - 10q_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} = 160 - 40q_2 = 0. \end{cases}$$

解此方程组得  $q_1 = 8, q_2 = 4$ .

由问题的实际意义可知,当  $q_1=8, q_2=4$ , 即  $p_1=80, p_2=120$  时, 厂家所获得的总利润最大, 其最大总利润为

$$L|_{q_1=8, q_2=4} = 605.$$

20. 设有一小山, 取它的底面所在的平面为  $xOy$  坐标面, 其底部所占的闭区域为  $D=\{(x, y) | x^2+y^2-xy \leq 75\}$ , 小山的高度函数为  $h=f(x, y)=75-x^2-y^2+xy$ .

(1) 设  $M(x_0, y_0) \in D$ , 问  $f(x, y)$  在该点沿平面上什么方向的方向导数最大? 若记此方向导数的最大值为  $g(x_0, y_0)$ , 试写出  $g(x_0, y_0)$  的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动, 为此需要在山脚找一上山坡度最大的点作为攀岩的起点, 也就是说, 要在  $D$  的边界线  $x^2+y^2-xy=75$  上找出(1)中的  $g(x, y)$  达到最大值的点. 试确定攀岩起点的位置.

解 (1) 由梯度与方向导数的关系知,  $h=f(x, y)$  在点  $M(x_0, y_0)$  处沿梯度

$$\text{grad} f(x_0, y_0) = (y_0 - 2x_0)i + (x_0 - 2y_0)j$$

方向的方向导数最大, 方向导数的最大值为该梯度的模, 所以

$$g(x_0, y_0) = \sqrt{(y_0 - 2x_0)^2 + (x_0 - 2y_0)^2} = \sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0y_0}.$$

(2) 欲在  $D$  的边界上求  $g(x, y)$  达到最大值的点, 只需求  $F(x, y) = g^2(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy$  达到最大值的点. 因此, 作拉格朗日函数

$$L = 5x^2 + 5y^2 - 8xy + \lambda(75 - x^2 - y^2 + xy).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 10x - 8y + \lambda(y - 2x) = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_y = 10y - 8x + \lambda(x - 2y) = 0. & (2) \end{cases}$$

又由约束条件, 有

$$75 - x^2 - y^2 + xy = 0. \quad (3)$$

(1)+(2), 得

$$(x+y)(2-\lambda) = 0,$$

解得  $y=-x$  或  $\lambda=2$ .

若  $\lambda=2$ , 则由(1)得  $y=x$ , 再由(3)得  $x=y=\pm 5\sqrt{3}$ .

若  $y=-x$ , 则由(3)得  $x=\pm 5, y=\mp 5$ .

于是得到四个可能的极值点:

$$M_1(5, -5), \quad M_2(-5, 5), \quad M_3(5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}), \quad M_4(-5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}).$$

由于  $F(M_1)=F(M_2)=450, F(M_3)=F(M_4)=150$ , 故  $M_1(5, -5)$  或  $M_2(-5, 5)$  可作为攀岩的起点.

## 第十章 重 积 分

### 习题 10-1

### 二重积分的概念与性质

1. 设有一平面薄板(不计其厚度), 占有  $xOy$  面上的闭区域  $D$ , 薄板上分布有面密度为  $\mu=\mu(x,y)$  的电荷, 且  $\mu(x,y)$  在  $D$  上连续, 试用二重积分表达该板上的全部电荷  $Q$ .

解 用一组曲线网将  $D$  分成  $n$  个小闭区域  $\Delta\sigma_i$ , 其面积也记为  $\Delta\sigma_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). 任取一点  $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$ , 则  $\Delta\sigma_i$  上分布的电荷  $\Delta Q_i \approx \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ . 通过求和、取极限, 便得到该板上的全部电荷为

$$Q = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \iint_D \mu(x, y) d\sigma,$$

其中  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta\sigma_i \text{ 的直径}\}$ .

注 以上解题过程也可用元素法简化叙述如下:

设想用曲线网将  $D$  分成  $n$  个小闭区域, 取出其中任意一个记作  $d\sigma$  (其面积也记作  $d\sigma$ ),  $(x, y)$  为  $d\sigma$  上一点, 则  $d\sigma$  上分布的电荷近似等于  $\mu(x, y) d\sigma$ , 记作

$$dQ = \mu(x, y) d\sigma \quad (\text{称为电荷元素}),$$

以  $dQ$  作为被积表达式, 在  $D$  上作重积分, 即得所求的电荷为

$$Q = \iint_D \mu(x, y) d\sigma.$$

2. 设  $I_1 = \iint_{D_1} (x^2 + y^2)^3 d\sigma$ , 其中  $D_1 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$ ;

又  $I_2 = \iint_{D_2} (x^2 + y^2)^3 d\sigma$ , 其中  $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ .

试利用二重积分的几何意义说明  $I_1$  与  $I_2$  之间的关系.

解 由二重积分的几何意义知,  $I_1$  表示底为  $D_1$ , 顶为曲面  $z=(x^2+y^2)^3$  的曲顶柱体  $\Omega_1$  的体积;  $I_2$  表示底为  $D_2$ 、顶为曲面  $z=(x^2+y^2)^3$  的曲顶柱体  $\Omega_2$  的体积(图 10-1). 由于位于  $D_1$  上方的曲面  $z=(x^2+y^2)^3$  关于  $yOz$  面和  $zOx$  面均对称, 故  $yOz$  面和  $zOx$  面将  $\Omega_1$  分成四个等积的部分, 其中位于第一卦限的部分即为  $\Omega_2$ . 由此可知



$$I_1 = 4I_2.$$

注 (1) 本题也可利用被积函数和积分区域的对称性来解答. 设  $D_3 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$ . 由于  $D_1$  关于  $y$  轴对称, 被积函数  $(x^2 + y^2)^3$  关于  $x$  是偶函数, 故

$$I_1 = \iint_{D_1} (x^2 + y^2)^3 d\sigma = 2 \iint_{D_3} (x^2 + y^2)^3 d\sigma.$$

又由于  $D_3$  关于  $x$  轴对称, 被积函数  $(x^2 + y^2)^3$  关于  $y$  是偶函数, 故

$$\iint_{D_3} (x^2 + y^2)^3 d\sigma = 2 \iint_{D_2} (x^2 + y^2)^3 d\sigma = 2I_2.$$

从而得

$$I_1 = 4I_2.$$

(2) 利用对称性来计算二重积分还有以下两个结论值得注意:

如果积分区域  $D$  关于  $x$  轴对称, 而被积函数  $f(x, y)$  关于  $y$  是奇函数, 即  $f(x, -y) = -f(x, y)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0;$$

如果积分区域  $D$  关于  $y$  轴对称, 而被积函数  $f(x, y)$  关于  $x$  是奇函数, 即  $f(-x, y) = -f(x, y)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0.$$

3. 利用二重积分定义证明:

$$(1) \iint_D d\sigma = \sigma \text{ (其中 } \sigma \text{ 为 } D \text{ 的面积);}$$

$$(2) \iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma \text{ (其中 } k \text{ 为常数);}$$

$$(3) \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

其中  $D = D_1 \cup D_2$ ,  $D_1, D_2$  为两个无公共内点的闭区域.

证 (1) 由于被积函数  $f(x, y) \equiv 1$ , 故由二重积分定义得

$$\begin{aligned} \iint_D d\sigma &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \sigma. \end{aligned}$$

$$(2) \iint_D kf(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

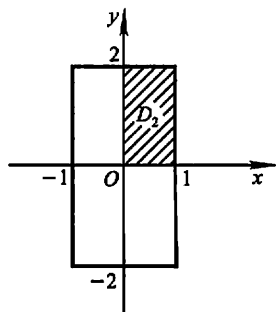


图 10-1

$$= k \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i = k \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

(3) 因为函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上可积, 故不论把  $D$  怎样分割, 积分和的极限总是不变的. 因此在分割  $D$  时, 可以使  $D_1$  和  $D_2$  的公共边界永远是一条分割线. 这样  $f(x, y)$  在  $D_1 \cup D_2$  上的积分和就等于  $D_1$  上的积分和加  $D_2$  上的积分和, 记为

$$\sum_{D_1 \cup D_2} f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i = \sum_{D_1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i + \sum_{D_2} f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i.$$

令所有  $\Delta \sigma_i$  的直径的最大值  $\lambda \rightarrow 0$ , 上式两端同时取极限, 即得

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

4. 根据二重积分的性质, 比较下列积分的大小:

(1)  $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$  与  $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$ , 其中积分区域  $D$  是由  $x$  轴、 $y$  轴与直线  $x+y=1$  所围成;

(2)  $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$  与  $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$ , 其中积分区域  $D$  是由圆周  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$  所围成;

(3)  $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$  与  $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$ , 其中  $D$  是三角形闭区域, 三顶点分别为  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 0)$ ;

(4)  $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$  与  $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | 3 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1\}$ .

解 (1) 在积分区域  $D$  上,  $0 \leq x+y \leq 1$ , 故有

$$(x+y)^3 \leq (x+y)^2.$$

根据二重积分的性质 4, 可得

$$\iint_D (x+y)^3 d\sigma \leq \iint_D (x+y)^2 d\sigma.$$

(2) 由于积分区域  $D$  位于半平面  $\{(x, y) | x+y \geq 1\}$  内, 故在  $D$  上有  $(x+y)^2 \leq (x+y)^3$ . 从而  $\iint_D (x+y)^2 d\sigma \leq \iint_D (x+y)^3 d\sigma$ .

(3) 由于积分区域  $D$  位于条形区域  $\{(x, y) | 1 \leq x+y \leq 2\}$  内, 故知区域  $D$  上的点满足  $0 \leq \ln(x+y) \leq 1$ , 从而有  $[\ln(x+y)]^2 \leq \ln(x+y)$ . 因此

$$\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma \leq \iint_D \ln(x+y) d\sigma.$$

(4) 由于积分区域  $D$  位于半平面  $\{(x, y) | x+y \geq e\}$  内, 故在  $D$  上有  $\ln(x+y)$

$y) \geq 1$ , 从而  $[\ln(x+y)]^2 \geq \ln(x+y)$ . 因此

$$\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma \geq \iint_D \ln(x+y) d\sigma.$$

5. 利用二重积分的性质估计下列积分的值:

(1)  $I = \iint_D xy(x+y) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ;

(2)  $I = \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ ;

(3)  $I = \iint_D (x+y+1) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ ;

(4)  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

解 (1) 在积分区域  $D$  上,  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ , 从而  $0 \leq xy(x+y) \leq 2$  又  $D$  的面积等于 1, 因此

$$0 \leq \iint_D xy(x+y) d\sigma \leq 2.$$

(2) 在积分区域  $D$  上,  $0 \leq \sin x \leq 1, 0 \leq \sin y \leq 1$ , 从而  $0 \leq \sin^2 x \sin^2 y \leq 1$ , 又  $D$  的面积等于  $\pi^2$ , 因此

$$0 \leq \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma \leq \pi^2.$$

(3) 在积分区域  $D$  上有  $1 \leq x+y+1 \leq 4$ ,  $D$  的面积等于 2, 因此

$$2 \leq \iint_D (x+y+1) d\sigma \leq 8.$$

(4) 因为在积分区域  $D$  上有  $0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ , 所以有

$$9 \leq x^2 + 4y^2 + 9 \leq 4(x^2 + y^2) + 9 \leq 25.$$

又  $D$  的面积等于  $4\pi$ , 因此

$$36\pi \leq \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma \leq 100\pi.$$

## 习题 10-2

## 二重积分的计算法

1. 计算下列二重积分:

(1)  $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ ;

(2)  $\iint_D (3x + 2y) d\sigma$ , 其中  $D$  是由两坐标轴及直线  $x + y = 2$  所围成的闭区域;

$$(3) \iint_D (x^3 + 3x^2y + y^3) d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$(4) \iint_D x \cos(x+y) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是顶点分别为 } (0,0), (\pi,0) \text{ 和 } (\pi,\pi) \text{ 的三角形}$$

闭区域.

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma &= \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 dx = \int_{-1}^1 \left( 2x^2 + \frac{2}{3} \right) dx = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

(2)  $D$  可用不等式表示为

$$0 \leq y \leq 2-x, 0 \leq x \leq 2.$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D (3x+2y) d\sigma &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (3x+2y) dy \\ &= \int_0^2 [3xy + y^2]_0^{2-x} dx = \int_0^2 (4 + 2x - 2x^2) dx = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \iint_D (x^3 + 3x^2y + y^3) d\sigma &= \int_0^1 dy \int_0^1 (x^3 + 3x^2y + y^3) dx \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{x^4}{4} + x^3y + y^3x \right]_0^1 dy = \int_0^1 \left( \frac{1}{4} + y + y^3 \right) dy = 1. \end{aligned}$$

(4)  $D$  可用不等式表示为

$$0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq \pi.$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D x \cos(x+y) d\sigma &= \int_0^\pi x dx \int_0^x \cos(x+y) dy \\ &= \int_0^\pi x [\sin(x+y)]_0^x dx = \int_0^\pi x (\sin 2x - \sin x) dx \\ &= \int_0^\pi x d\left(\cos x - \frac{1}{2} \cos 2x\right) \\ &= \left[ x \left( \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left( \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= \pi \left( -1 - \frac{1}{2} \right) - 0 = -\frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

2. 画出积分区域, 并计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D \sqrt{y} d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是由两条抛物线 } y = \sqrt{x}, y = x^2 \text{ 所围成的闭区域};$$

$$(2) \iint_D xy^2 d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是由圆周 } x^2 + y^2 = 4 \text{ 及 } y \text{ 轴所围成的右半闭区域};$$

(3)  $\iint_D e^{x+y} d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$ ;

(4)  $\iint_D (x^2 + y^2 - x) d\sigma$ , 其中  $D$  是由直线  $y = 2$ ,  $y = x$  及  $y = 2x$  所围成的闭区域.

解 (1)  $D$  可用不等式表示为

$$x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1 \text{ (图 10-2)}.$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D x \sqrt{y} d\sigma &= \int_0^1 x dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \sqrt{y} dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 x [y^{\frac{3}{2}}]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 (x^{\frac{7}{4}} - x^4) dx \\ &= \frac{6}{55}. \end{aligned}$$

(2)  $D$  可用不等式表示为

$$0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, -2 \leq y \leq 2 \text{ (图 10-3)},$$

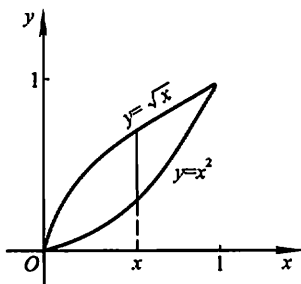


图 10-2

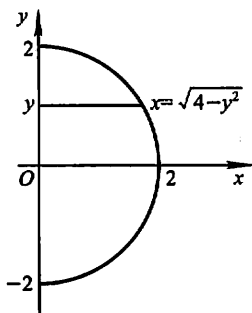


图 10-3

故

$$\begin{aligned} \iint_D x y^2 d\sigma &= \int_{-2}^2 y^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 y^2 (4 - y^2) dy = \frac{64}{15}. \end{aligned}$$

(3) 如图 10-4,  $D = D_1 \cup D_2$ , 其中

$$D_1 = \{(x, y) \mid -x-1 \leq y \leq x+1, -1 \leq x \leq 0\};$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid x-1 \leq y \leq -x+1, 0 \leq x \leq 1\}.$$

因此

$$\iint_D e^{x+y} d\sigma = \iint_{D_1} e^{x+y} d\sigma + \iint_{D_2} e^{x+y} d\sigma$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^0 e^x dx \int_{-x-1}^{x+1} e^y dy + \int_0^1 e^x dx \int_{x-1}^{-x+1} e^y dy \\
&= \int_{-1}^0 (e^{2x+1} - e^{-1}) dx + \int_0^1 (e - e^{2x-1}) dx \\
&= e - e^{-1}.
\end{aligned}$$

(4)  $D: \frac{y}{2} \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 2$  (图 10-5),

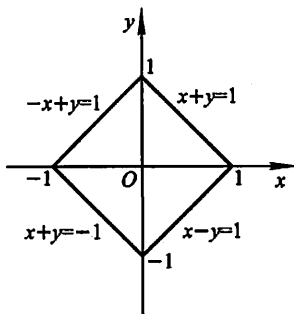


图 10-4

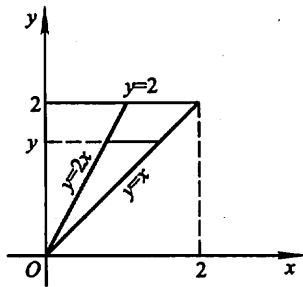


图 10-5

故

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2 + y^2 - x) d\sigma &= \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y (x^2 + y^2 - x) dx \\
&= \int_0^2 \left[ \frac{x^3}{3} + y^2 x - \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{y}{2}}^y dy \\
&= \int_0^2 \left( \frac{19}{24} y^3 - \frac{3}{8} y^2 \right) dy = \frac{13}{6}.
\end{aligned}$$

3. 如果二重积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  的被积函数  $f(x, y)$  是两个函数  $f_1(x)$  及  $f_2(y)$  的乘积, 即  $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ , 积分区域  $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , 证明这个二重积分等于两个单积分的乘积, 即

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \left[ \int_a^b f_1(x) dx \right] \cdot \left[ \int_c^d f_2(y) dy \right].$$

证 
$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy \right] dx.$$

在上式右端的第一次单积分  $\int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy$  中,  $f_1(x)$  与积分变量  $y$  无关, 可视为常数提到积分号外, 因此上式右端等于

$$\int_a^b f_1(x) \cdot \left[ \int_c^d f_2(y) dy \right] dx.$$

而在这个积分中, 由于  $\int_c^d f_2(y) dy$  为常数, 故又可提到积分号外, 从而得到

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \left[ \int_c^d f_2(y) dy \right] \cdot \left[ \int_a^b f_1(x) dx \right]$$

$$= \left[ \int_a^b f_1(x) dx \right] \cdot \left[ \int_c^d f_2(y) dy \right]. \text{证毕.}$$

#### 4. 化二重积分

$$I = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

为二次积分(分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分),其中积分区域  $D$  是:

- (1) 由直线  $y=x$  及抛物线  $y^2=4x$  所围成的闭区域;
- (2) 由  $x$  轴及半圆周  $x^2+y^2=r^2 (y \geq 0)$  所围成的闭区域;
- (3) 由直线  $y=x, x=2$  及双曲线  $y=\frac{1}{x} (x>0)$  所围成的闭区域;
- (4) 环形闭区域  $\{(x, y) | 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$ .

解 (1) 直线  $y=x$  及抛物线  $y^2=4x$  的交点为  $(0,0)$  和  $(4,4)$  (图 10-6). 于是

$$I = \int_0^4 dx \int_x^{\sqrt{4x}} f(x, y) dy,$$

或

$$I = \int_0^4 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^y f(x, y) dx.$$

(2) 将  $D$  用不等式表示为  $0 \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2}, -r \leq x \leq r$ , 于是可将  $I$  化为如下的先对  $y$ 、后对  $x$  的二次积分:

$$I = \int_{-r}^r dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x, y) dy;$$

如将  $D$  用不等式表示为  $-\sqrt{r^2-y^2} \leq x \leq \sqrt{r^2-y^2}, 0 \leq y \leq r$ , 则可将  $I$  化为如下的先对  $x$ 、后对  $y$  的二次积分:

$$I = \int_0^r dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x, y) dx.$$

(3) 如图 10-7. 三条边界曲线两两相交, 先求得 3 个交点为  $(1,1)$ ,  $(2, \frac{1}{2})$  和  $(2,2)$ . 于是

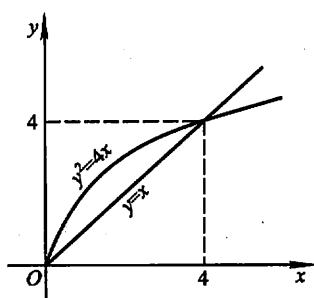


图 10-6

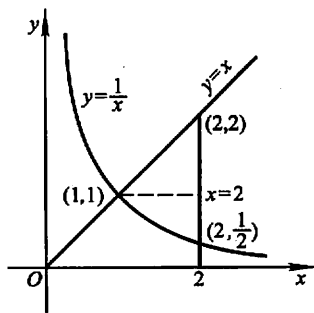


图 10-7

$$I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy;$$

或

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx.$$

注 本题说明,将二重积分化为二次积分时,需注意根据积分区域的边界曲线情况,选取恰当的积分次序,本题中的积分区域  $D$  的上、下边界曲线均分别由一个方程给出,而左边界曲线却分为两段,由两个不同的方程给出,在这种情况下采取先对  $y$ 、后对  $x$  的积分次序比较有利,这样只需做一个二次积分,而如果采用相反的积分次序则需计算两个二次积分.

需要指出,选择积分次序时,还需考虑被积函数  $f(x, y)$  的特点. 具体例子可见教材下册第 141 页上的例 2.

(4) 将  $D$  按图 10-8(a) 和图 10-8(b) 的两种不同方式划分为 4 块,分别得

$$I = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy +$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy,$$

和

$$I = \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx +$$

$$\int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx.$$

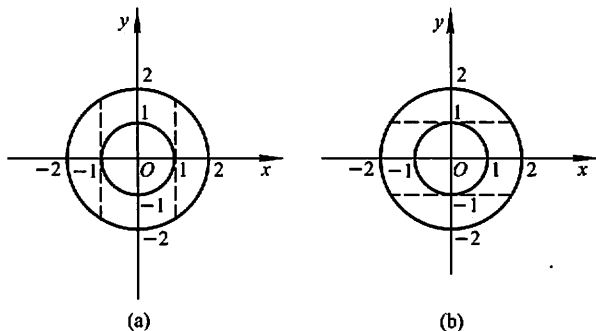


图 10-8

5. 设  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 其中  $D$  是由直线  $y = x$ 、 $y = a$  及  $x = b (b > a)$  所围成的闭区域, 证明

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$$

证 等式两端的二次积分均等于二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ , 因而它们相等.



6. 改换下列二次积分的积分次序:

$$(1) \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx; \quad (2) \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx;$$

$$(3) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx; \quad (4) \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$(5) \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy; \quad (6) \int_0^\pi dx \int_{-\sin \frac{x}{2}}^{\sin x} f(x, y) dy.$$

解 (1) 所给二次积分等于二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}$ .  $D$  可改写为  $\{(x, y) \mid x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$  (图 10-9), 于是

$$\text{原式} = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y) dy.$$

(2) 所给二次积分等于二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 2\}$ . 又  $D$  可表示为  $\{(x, y) \mid \frac{x}{2} \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4\}$  (图 10-10), 因此

$$\text{原式} = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

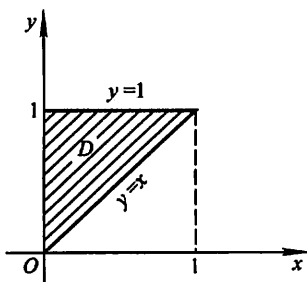


图 10-9

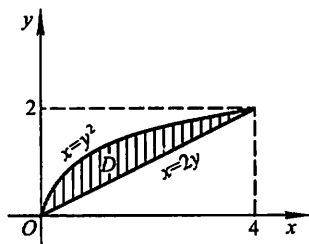


图 10-10

(3) 所给二次积分等于二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1\}$ . 又  $D$  可表示为  $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$  (图 10-11), 因此

$$\text{原式} = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

(4) 所给二次积分等于二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid 2-x \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}, 1 \leq x \leq 2\}$ . 又  $D$  可表示为  $\{(x, y) \mid 2-y \leq x \leq 1+\sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1\}$  (图 10-12), 故

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

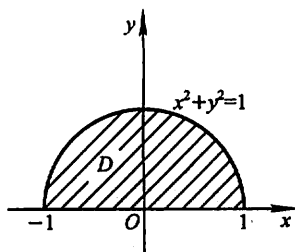


图 10-11

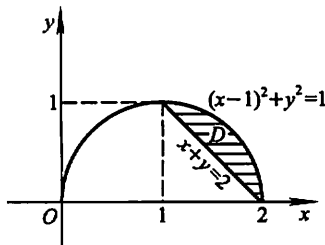


图 10-12

(5) 所给二次积分等于二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq e\}$ . 又  $D$  可表示为  $\{(x, y) \mid e^y \leq x \leq e, 0 \leq y \leq 1\}$  (图 10-13), 故

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx.$$

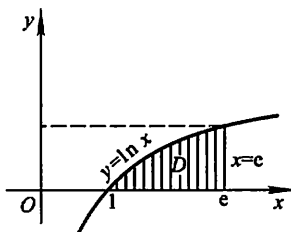


图 10-13

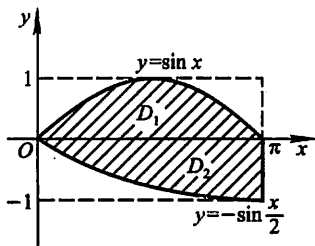


图 10-14

(6) 如图 10-14, 将积分区域  $D$  表示为  $D_1 \cup D_2$ , 其中  $D_1 = \{(x, y) \mid \arcsin y \leq x \leq \pi - \arcsin y, 0 \leq y \leq 1\}$  ①,  $D_2 = \{(x, y) \mid -2\arcsin y \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 0\}$ . 于是

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx.$$

7. 设平面薄片所占的闭区域  $D$  由直线  $x+y=2$ ,  $y=x$  和  $x$  轴所围成, 它的面密度  $\mu(x, y) = x^2 + y^2$ , 求该薄片的质量.

解  $D$  如图 10-15 所示.

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \mu(x, y) d\sigma = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x^2 + y^2) dx \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{3} x^3 + x y^2 \right]_y^{2-y} dy \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{3} (2-y)^3 + 2y^2 - \frac{7}{3} y^3 \right] dy \end{aligned}$$

① 当  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  时,  $y = \sin x$  的反函数是  $x = \arcsin y$ . 而当  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$  时,  $\pi - x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . 于是由  $y = \sin x = \sin(\pi - x)$  可得  $\pi - x = \arcsin y$ , 从而得反函数  $x = \pi - \arcsin y$ .

$$= \left[ -\frac{1}{12}(2-y)^4 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{7}{12}y^4 \right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

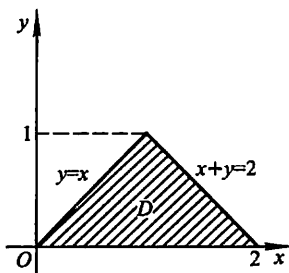


图 10-15

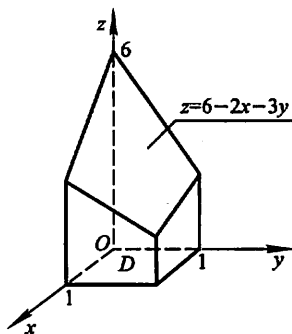


图 10-16

8. 计算由四个平面  $x=0, y=0, x=1, y=1$  所围成的柱体被平面  $z=0$  及  $2x+3y+z=6$  截得的立体的体积.

解 此立体为一曲顶柱体, 它的底是  $xOy$  面上的闭区域  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , 顶是曲面  $z=6-2x-3y$  (图 10-16). 因此所求立体的体积

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (6-2x-3y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (6-2x-3y) dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{9}{2} - 2x \right) dx = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

9. 求由平面  $x=0, y=0, x+y=1$  所围成的柱体被平面  $z=0$  及抛物面  $x^2+y^2=6-z$  截得的立体的体积.

解 此立体为一曲顶柱体, 它的底是  $xOy$  面上的闭区域  $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$ , 顶是曲面  $z=6-(x^2+y^2)$  (图 10-17), 故体积

$$\begin{aligned} V &= \iint_D [6-(x^2+y^2)] dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (6-x^2-y^2) dy \\ &= \int_0^1 \left[ 6(1-x) - x^2 + x^3 - \frac{1}{3}(1-x)^3 \right] dx \\ &= \frac{17}{6}. \end{aligned}$$

10. 求由曲面  $z=x^2+2y^2$  及  $z=6-2x^2-y^2$  所围成的立体的体积.

解 由  $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases}$  消去  $z$ , 得  $x^2+y^2=2$ , 故所求立体在  $xOy$  面上的投影区域为

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2\} \text{ (图 10-18).}$$

所求立体的体积等于两个曲顶柱体体积的差:

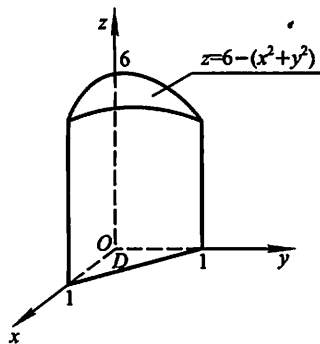


图 10-17

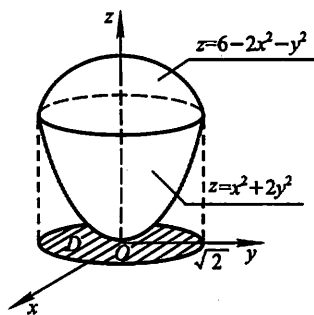


图 10-18

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (6 - 2x^2 - y^2) d\sigma - \iint_D (x^2 + 2y^2) d\sigma \\
 &= \iint_D (6 - 3x^2 - 3y^2) d\sigma = \iint_D (6 - 3\rho^2) \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (6 - 3\rho^2) \rho d\rho = 6\pi.
 \end{aligned}$$

**注** 求类似于第 8、9、10 题中这样的立体体积时,并不一定要画出立体的准确图形,但一定要会求出立体在坐标面上的投影区域,并知道立体的底和顶的方程,这就需要复习和掌握第八章中学过的空间解析几何的有关知识.

11. 画出积分区域,把积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  表示为极坐标形式的二次积分,

其中积分区域  $D$  是:

- (1)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\} (a > 0)$ ;
- (2)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$ ;
- (3)  $\{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$ , 其中  $0 < a < b$ ;
- (4)  $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1\}$ .

**解** (1) 如图 10-19,在极坐标系中,  $D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , 故

$$\begin{aligned}
 \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.
 \end{aligned}$$

(2) 如图 10-20,在极坐标系中,

$D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ , 故

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \rho d\rho.$$

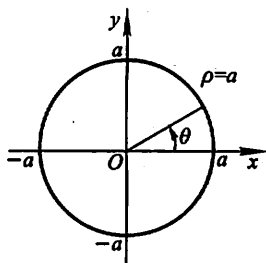


图 10-19

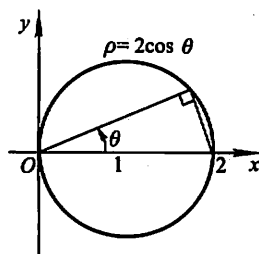


图 10-20

(3) 如图 10-21, 在极坐标系中,

$D = \{(\rho, \theta) \mid a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , 故

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

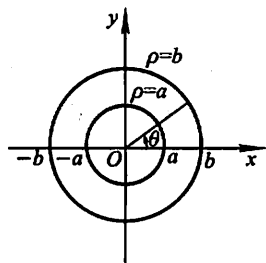


图 10-21

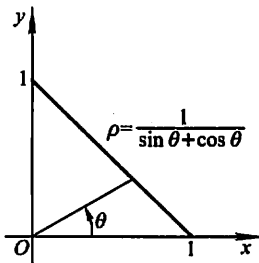


图 10-22

(4)  $D$  如图 10-22 所示. 在极坐标系中, 直线  $x + y = 1$  的方程为  $\rho = \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta}$ , 故  $D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ . 于是

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin\theta + \cos\theta}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

12. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分:

(1)  $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy;$  (2)  $\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy;$

(3)  $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy;$  (4)  $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$

解 (1) 如图 10-23, 用直线  $y = x$  将积分区域  $D$  分成  $D_1$ 、 $D_2$  两部分:

$$D_1 = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\};$$

$$D_2 = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \csc \theta, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

于是

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\csc \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

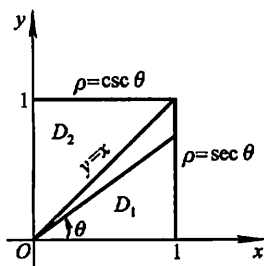


图 10-23

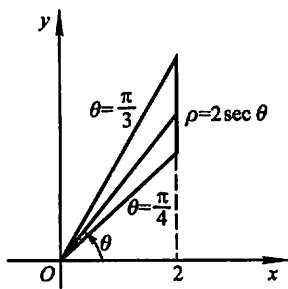


图 10-24

(2)  $D$  如图 10-24 所示. 在极坐标系中, 直线  $x=2$ ,  $y=x$  和  $y=\sqrt{3}x$  的方程分别是  $\rho=2\sec \theta$ ,  $\theta=\frac{\pi}{4}$  和  $\theta=\frac{\pi}{3}$ . 因此

$$D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2\sec \theta, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\}.$$

又,  $f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(\rho)$ . 于是

$$\text{原式} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{2\sec \theta} f(\rho) \rho d\rho.$$

(3)  $D$  如图 10-25 所示. 在极坐标系中, 直线  $y=1-x$  的方程为  $\rho = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$ , 圆  $y=\sqrt{1-x^2}$  的方程为  $\rho=1$ , 因此

$$D = \{(\rho, \theta) \mid \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},$$

于是

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}}^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

(4)  $D$  如图 10-26 所示. 在极坐标系中, 直线  $x=1$  的方程是  $\rho=\sec \theta$ ; 抛物线  $y=x^2$  的方程是  $\rho \sin \theta = \rho^2 \cos^2 \theta$ , 即  $\rho = \tan \theta \sec \theta$ ; 两者的交点与原点的连线的方程是  $\theta=\frac{\pi}{4}$ . 故

$$D = \{(\rho, \theta) \mid \tan \theta \sec \theta \leq \rho \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\},$$

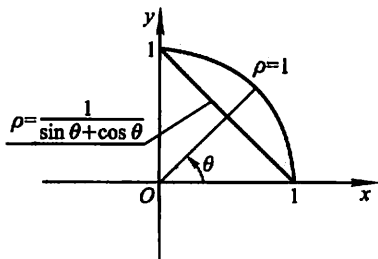


图 10-25

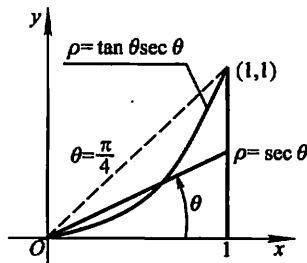


图 10-26

于是

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\tan \theta \sec \theta}^{\sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

13. 把下列积分化为极坐标形式, 并计算积分值:

$$(1) \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy;$$

$$(2) \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_x^x (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} dy;$$

$$(4) \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2) dx.$$

解 (1) 积分区域  $D$  如图 10-27 所示. 在极坐标系中,

$$D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},$$

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho^2 \cdot \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{2a \cos \theta} d\theta \\ &= 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = 4a^4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4} \pi a^4. \end{aligned}$$

注 在多元函数积分学的计算题中, 常会遇到定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$  和  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta$ . 因此记住如下的结果是很有益的:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta \left( = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta \right) = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于 1 的正奇数.} \end{cases}$$

(2) 如图 10-28, 在极坐标系中,

$$D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq a \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

于是

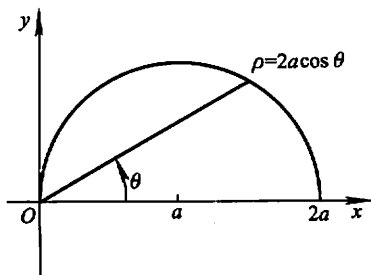


图 10-27

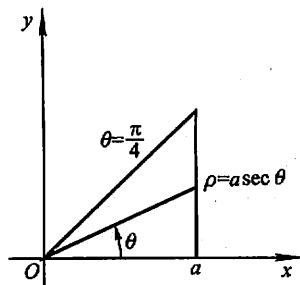


图 10-28

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a \sec \theta} \rho \cdot \rho d\rho \\
 &= \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 \theta d\theta \\
 &= \frac{a^3}{6} [\sec \theta \tan \theta + \ln(\sec \theta + \tan \theta)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{a^3}{6} [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)].
 \end{aligned}$$

(3) 积分区域  $D$  如图 10-29 所示. 在极坐标系中, 抛物线  $y=x^2$  的方程是  $\rho \sin \theta = \rho^2 \cos^2 \theta$ , 即  $\rho = \tan \theta \sec \theta$ ; 直线  $y=x$  的方程是  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , 故

$$D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \tan \theta \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

于是

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\tan \theta \sec \theta} \frac{1}{\rho} \cdot \rho d\rho \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan \theta \sec \theta d\theta = [\sec \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1.
 \end{aligned}$$

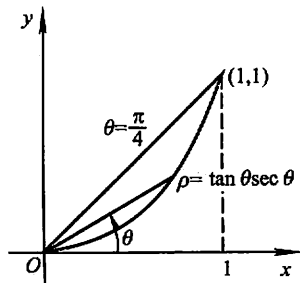


图 10-29

$$\begin{aligned}
 (4) \text{ 积分区域 } D &= \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2}, 0 \leq y \leq a\} \\
 &= \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},
 \end{aligned}$$

故

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^2 \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\pi}{8} a^4.$$

14. 利用极坐标计算下列各题:

(1)  $\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma$ , 其中  $D$  是由圆周  $x^2+y^2=4$  所围成的闭区域;



(2)  $\iint_D \ln(1+x^2+y^2) d\sigma$ , 其中  $D$  是由圆周  $x^2+y^2=1$  及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

(3)  $\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma$ , 其中  $D$  是由圆周  $x^2+y^2=4$ ,  $x^2+y^2=1$  及直线  $y=0$ ,  $y=x$  所围成的在第一象限内的闭区域.

解 (1) 在极坐标系中, 积分区域  $D=\{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , 于是

$$\iint_D e^{x^2+y^2} d\sigma = \iint_D e^{\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 e^{\rho^2} \cdot \rho d\rho = 2\pi \cdot \left[ \frac{e^{\rho^2}}{2} \right]_0^2 = \pi(e^4 - 1).$$

(2) 在极坐标系中, 积分区域  $D=\{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ , 于是

$$\begin{aligned} \iint_D \ln(1+x^2+y^2) d\sigma &= \iint_D \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \ln(1+\rho^2) \cdot \rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+\rho^2) d(1+\rho^2) \\ &= \frac{\pi}{4} \left[ (1+\rho^2) \ln(1+\rho^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 2\rho d\rho \right] \\ &= \frac{\pi}{4} (2\ln 2 - 1). \end{aligned}$$

(3) 在极坐标系中, 积分区域  $D=\{(\rho, \theta) | 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$ ,  $\arctan \frac{y}{x} = \theta$ , 于是

$$\begin{aligned} \iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma &= \iint_D \theta \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta d\theta \int_1^2 \rho d\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} (2^2 - 1) \\ &= \frac{3}{64} \pi^2. \end{aligned}$$

15. 选用适当的坐标计算下列各题:

(1)  $\iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma$ , 其中  $D$  是由直线  $x=2$ ,  $y=x$  及曲线  $xy=1$  所围成的闭区域;

(2)  $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma$ , 其中  $D$  是由圆周  $x^2+y^2=1$  及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

(3)  $\iint_D (x^2+y^2) d\sigma$ , 其中  $D$  是由直线  $y=x$ ,  $y=x+a$ ,  $y=a$ ,  $y=3a$  ( $a>0$ ) 所围成的闭区域;

(4)  $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$ , 其中  $D$  是圆环形闭区域  $\{(x, y) | a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2\}$ .

解 (1)  $D$  如图 10-30 所示. 根据  $D$  的形状, 选用直角坐标较宜.

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{x} \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2 \right\}, \text{故}$$

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma &= \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy \\ &= \int_1^2 (-x + x^3) dx = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

(2) 根据积分区域  $D$  的形状和被积函数的特点, 选用极坐标为宜.

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \text{故}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_D \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}} \rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 \frac{1-\rho^2}{\sqrt{1-\rho^4}} \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \left( \int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^4}} d\rho - \int_0^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^4}} d\rho \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}} d\rho^2 + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}} d(1-\rho^4) \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{2} \arcsin \rho^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \sqrt{1-\rho^4} \Big|_0^1 \right] \\ &= \frac{\pi}{8} (\pi - 2). \end{aligned}$$

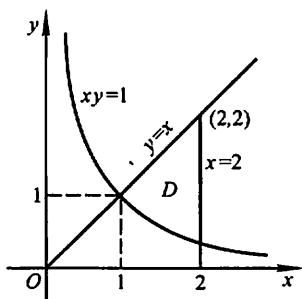


图 10-30

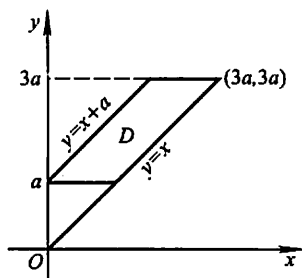


图 10-31

(3)  $D$  如图 10-31 所示. 选用直角坐标为宜. 又根据  $D$  的边界曲线的情况, 宜采用先对  $x$ 、后对  $y$  的积分次序. 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma &= \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2 + y^2) dx \\ &= \int_a^{3a} \left( 2ay^2 - a^2y + \frac{a^3}{3} \right) dy = 14a^4. \end{aligned}$$

(4) 本题显然适于用极坐标计算.  $D = \{ (\rho, \theta) \mid a \leq \rho \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$ .

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma &= \iint_D \rho \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \rho^2 d\rho \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{3} (b^3 - a^3) = \frac{2}{3} \pi (b^3 - a^3).\end{aligned}$$

16. 设平面薄片所占的闭区域  $D$  由螺线  $\rho=2\theta$  上一段弧 ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) 与直线  $\theta=\frac{\pi}{2}$  所围成, 它的面密度为  $\mu(x,y)=x^2+y^2$ . 求这薄片的质量.

解 薄片的质量为它的面密度在薄片所占区域  $D$  上的二重积分(图 10-32), 即

$$\begin{aligned}M &= \iint_D \mu(x,y) d\sigma = \iint_D (x^2+y^2) d\sigma \\ &= \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\theta} \rho^3 d\rho \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^4 d\theta = \frac{\pi^5}{40}.\end{aligned}$$

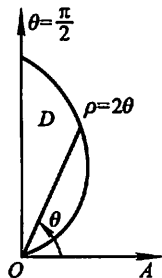


图 10-32

17. 求由平面  $y=0, y=kx(k>0), z=0$  以及球心在原点、半径为  $R$  的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积.

解 如图 10-33,

$$\begin{aligned}V &= \iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2} d\sigma = \iint_D \sqrt{R^2-\rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^a d\theta \int_0^R \sqrt{R^2-\rho^2} \rho d\rho = a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^R \sqrt{R^2-\rho^2} d(R^2-\rho^2) \\ &= \frac{aR^3}{3} = \frac{R^3}{3} \arctan k.\end{aligned}$$

18. 计算以  $xOy$  面上的圆周  $x^2+y^2=ax$  围成的闭区域为底, 而以曲面  $z=x^2+y^2$  为顶的曲顶柱体的体积.

解 如图 10-34, 设

$$\begin{aligned}D_1 &= \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{ax-x^2}, 0 \leq x \leq a\} \\ &= \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq a \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},\end{aligned}$$

由于曲顶柱体关于  $xOz$  面对称, 故

$$\begin{aligned}V &= 2 \iint_{D_1} (x^2+y^2) dx dy \\ &= 2 \iint_{D_1} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \rho^3 d\rho\end{aligned}$$

$$= \frac{a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{a^4}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{32} \pi a^4.$$

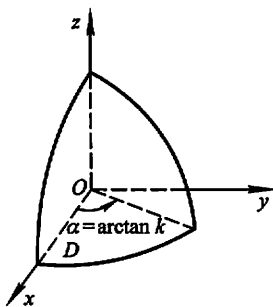


图 10-33

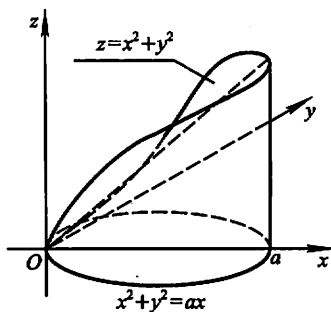


图 10-34

注 在计算立体体积时,要注意充分利用图形的对称性,这样既能简化运算,也能减少错误.

\* 19. 作适当的变换,计算下列二重积分:

(1)  $\iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y) dx dy$ , 其中  $D$  是平行四边形闭区域,它的四个顶点是  $(\pi, 0)$ ,  $(2\pi, \pi)$ ,  $(\pi, 2\pi)$  和  $(0, \pi)$ ;

(2)  $\iint_D x^2 y^2 dx dy$ , 其中  $D$  是由两条双曲线  $xy=1$  和  $xy=2$ , 直线  $y=x$  和  $y=4x$  所围成的在第 I 象限内的闭区域;

(3)  $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $x$  轴、 $y$  轴和直线  $x+y=1$  所围成的闭区域;

(4)  $\iint_D \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy$ , 其中  $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ .

解 (1) 令  $u=x-y, v=x+y$ , 则  $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{v-u}{2}$ . 在这变换下,  $D$  的边界  $x-y=-\pi, x+y=\pi, x-y=\pi, x+y=3\pi$  依次与  $u=-\pi, v=\pi, u=\pi, v=3\pi$  对应. 后者构成  $uOv$  平面上与  $D$  对应的闭区域  $D'$  的边界. 于是

$$D' = \{(u, v) \mid -\pi \leq u \leq \pi, \pi \leq v \leq 3\pi\} \text{ (图 10-35).}$$

$$\text{又} \quad J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2},$$

因此

$$\iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y) dx dy = \iint_{D'} u^2 \sin^2 v \cdot \frac{1}{2} du dv$$

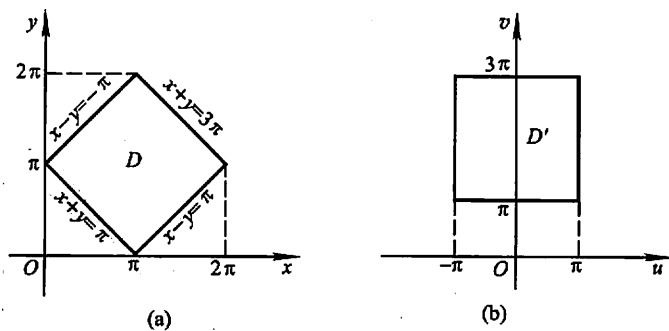


图 10-35

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} u^2 du \int_{\pi}^{3\pi} \sin^2 v dv = \frac{1}{2} \left[ \frac{u^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} \cdot \left[ \frac{v}{2} - \frac{\sin 2v}{4} \right]_{\pi}^{3\pi} \\
 &= \frac{\pi^4}{3}.
 \end{aligned}$$

(2) 令  $u=xy, v=\frac{y}{x}$ , 则  $x=\sqrt{\frac{u}{v}}, y=\sqrt{uv}$ . 在这变换下,  $D$  的边界  $xy=1, y=x, xy=2, y=4x$  依次与  $u=1, v=1, u=2, v=4$  对应, 后者构成  $uOv$  平面上与  $D$  对应的闭区域  $D'$  的边界. 于是  $D'=\{(u,v) | 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\}$  (图 10-36). 又

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{v} + \frac{1}{v} \right) = \frac{1}{2v}.$$

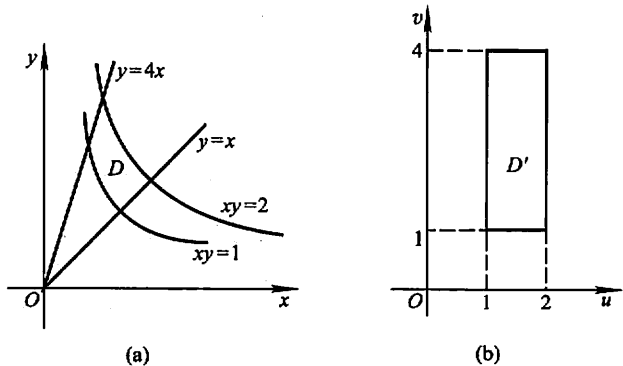


图 10-36

因此

$$\begin{aligned}
 \iint_D x^2 y^2 dx dy &= \iint_{D'} u^2 \cdot \frac{1}{2v} du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 u^2 du \int_1^4 \frac{1}{v} dv \\
 &= \frac{7}{3} \ln 2.
 \end{aligned}$$

(3) 令  $u=x+y, v=y$ , 即  $x=u-v, y=v$ , 则在这变换下,  $D$  的边界  $y=0, x=0, x+y=1$  依次与  $v=0, u=v, u=1$  对应. 后者构成  $uOv$  平面上与  $D$  对应的闭区域  $D'$  的边界, 于是

$$D' = \{(u, v) \mid 0 \leq v \leq u, 0 \leq u \leq 1\}.$$

又

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

因此

$$\begin{aligned} \iint_D e^{\frac{x}{x+y}} dx dy &= \iint_{D'} e^{\frac{u-v}{u}} du dv \\ &= \int_0^1 du \int_0^u e^{\frac{u-v}{u}} dv = \int_0^1 u(e-1) du \\ &= \frac{1}{2}(e-1). \end{aligned}$$

(4) 作广义极坐标变换  $\begin{cases} x = a\rho \cos \theta, \\ y = b\rho \sin \theta \end{cases}$  ( $a > 0, b > 0, \rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ). 在此变换下, 与  $D$  对应的闭区域为  $D' = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . 又

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -a\rho \sin \theta \\ b \sin \theta & b\rho \cos \theta \end{vmatrix} = ab\rho.$$

故

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy &= \iint_{D'} \rho^2 \cdot ab\rho d\rho d\theta \\ &= ab \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} ab\pi. \end{aligned}$$

20. 求由下列曲线所围成的闭区域  $D$  的面积:

(1)  $D$  是由曲线  $xy=4, xy=8, xy^{3/2}=5, xy^3=15$  所围成的第 I 象限部分的闭区域;

(2)  $D$  是由曲线  $y=x^3, y=4x^3, x=y^3, x=4y^3$  所围成的第 I 象限部分的闭区域.

解 (1) 令  $u=xy, v=xy^3$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ), 则  $x = \sqrt{\frac{u^3}{v}}, y = \sqrt{\frac{v}{u}}$ . 在这变换下, 与  $D$  对应的  $uOv$  平面上的闭区域为  $D' = \{(u, v) \mid 4 \leq u \leq 8, 5 \leq v \leq 15\}$ .

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u^3}{v^3}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u^3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v},$$

于是所求面积为

$$A = \iint_D dx dy = \iint_{D'} \frac{1}{2v} du dv = \frac{1}{2} \int_4^8 du \int_5^{15} \frac{1}{v} dv$$

$$= 2\ln 3.$$

(2) 令  $u = \frac{y}{x^3}, v = \frac{x}{y^3} (x > 0, y > 0)$ , 则  $x = u^{-\frac{3}{8}} v^{-\frac{1}{8}}, y = u^{-\frac{1}{8}} v^{-\frac{3}{8}}$ . 在这变换下, 与  $D$  对应的  $uOv$  平面上的闭区域为  $D' = \{(u, v) | 1 \leq u \leq 4, 1 \leq v \leq 4\}$ . 又

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{8}u^{-\frac{11}{8}}v^{-\frac{1}{8}} & -\frac{1}{8}u^{-\frac{3}{8}}v^{-\frac{9}{8}} \\ -\frac{1}{8}u^{-\frac{9}{8}}v^{-\frac{3}{8}} & -\frac{3}{8}u^{-\frac{1}{8}}v^{-\frac{11}{8}} \end{vmatrix} = \frac{1}{8}u^{-\frac{3}{2}}v^{-\frac{3}{2}}.$$

于是所求面积为

$$\begin{aligned} A &= \iint_D dx dy = \iint_{D'} \frac{1}{8} u^{-\frac{3}{2}} v^{-\frac{3}{2}} du dv = \frac{1}{8} \int_1^4 u^{-\frac{3}{2}} du \int_1^4 v^{-\frac{3}{2}} dv \\ &= \frac{1}{8} ([-2u^{-\frac{1}{2}}]_1^4)^2 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

\* 21. 设闭区域  $D$  是由直线  $x+y=1, x=0, y=0$  所围成, 求证

$$\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy = \frac{1}{2} \sin 1.$$

证 令  $u = x-y, v = x+y$ , 则  $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{v-u}{2}$ , 在此变换下,  $D$  的边界  $x+y=1, x=0, y=0$  依次与  $v=1, u+v=0$  和  $v-u=0$  对应. 后者构成  $uOv$  平面上与  $D$  对应的闭区域  $D'$  的边界 (图 10-37). 于是

$$D' = \{(u, v) | -v \leq u \leq v, 0 \leq v \leq 1\}.$$

又

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2},$$

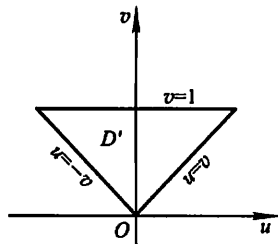


图 10-37

因此有

$$\begin{aligned} \iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy &= \iint_{D'} \cos \frac{u}{v} \cdot \frac{1}{2} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^v \cos \frac{u}{v} du = \frac{1}{2} \int_0^1 v \left[ \sin \frac{u}{v} \right]_{-v}^v dv \\ &= \int_0^1 v \sin 1 dv = \frac{1}{2} \sin 1. \text{ 证毕.} \end{aligned}$$

\* 22. 选取适当的变换, 证明下列等式:

$$(1) \iint_D f(x+y) dx dy = \int_{-1}^1 f(u) du, \text{ 其中闭区域 } D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\};$$

(2)  $\iint_D f(ax+by+c) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c) du$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2+y^2 \leq 1\}$ , 且  $a^2+b^2 \neq 0$ .

证 (1) 闭区域  $D$  的边界为  $x+y=-1, x+y=1, x-y=-1, x-y=1$ , 故令  $u=x+y, v=x-y$ , 即  $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$ . 在此变换下,  $D$  变为  $uOv$  平面上的闭区域

$$D' = \{(u, v) | -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1\}.$$

又

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D f(x+y) dx dy &= \iint_{D'} f(u) \left| -\frac{1}{2} \right| du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(u) du \int_{-1}^1 dv = \int_{-1}^1 f(u) du. \text{ 证毕.} \end{aligned}$$

(2) 比较等式的两端可知需作变换

$$u\sqrt{a^2+b^2} = ax+by, \text{ 即 } u = \frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

再考虑到  $D$  的边界曲线为  $x^2+y^2=1$ , 故令  $v = \frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$ , 这样就有  $u^2+v^2=1$ ,

即  $D$  的边界曲线  $x^2+y^2=1$  变为  $uOv$  平面上的圆  $u^2+v^2=1$ . 于是与  $D$  对应的闭区域为  $D' = \{(u, v) | u^2+v^2 \leq 1\}$ .

又由  $u, v$  的表达式可解得

$$x = \frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}}, y = \frac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

因此雅可比式

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{vmatrix} = -1,$$

于是

$$\iint_D f(ax+by+c) dx dy = \iint_{D'} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c) | -1 | du dv$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^1 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c) dv \\
 &= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c) du.
 \end{aligned}$$

证毕.

### 习题 10-3

### 三重积分

1. 化三重积分  $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  为三次积分, 其中积分区域  $\Omega$  分别是:

(1) 由双曲抛物面  $xy=z$  及平面  $x+y-1=0, z=0$  所围成的闭区域;

(2) 由曲面  $z=x^2+y^2$  及平面  $z=1$  所围成的闭区域;

(3) 由曲面  $z=x^2+2y^2$  及  $z=2-x^2$  所围成的闭区域;

(4) 由曲面  $cz=xy (c>0), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z=0$  所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 (1)  $\Omega$  的顶  $z=xy$  和底面  $z=0$  的交线为  $x$  轴和  $y$  轴, 故  $\Omega$  在  $xOy$  面上的投影区域由  $x$  轴、 $y$  轴和直线  $x+y-1=0$  所围成. 于是  $\Omega$  可用不等式表示为

$$0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1,$$

因此

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz.$$

(2) 由  $z=x^2+y^2$  和  $z=1$  得  $x^2+y^2=1$ , 所以  $\Omega$  在  $xOy$  面上的投影区域为  $x^2+y^2 \leq 1$  (图 10-38).  $\Omega$  可用不等式表示为

$$x^2+y^2 \leq z \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1,$$

因此

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz.$$

(3) 由  $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$  消去  $z$ , 得  $x^2+y^2=1$ . 故  $\Omega$  在  $xOy$  面上的投影区域为  $x^2+y^2 \leq 1$  (图 10-39). 于是  $\Omega$  可用不等式表示为

$$x^2+2y^2 \leq z \leq 2-x^2, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1,$$

因此

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x, y, z) dz.$$

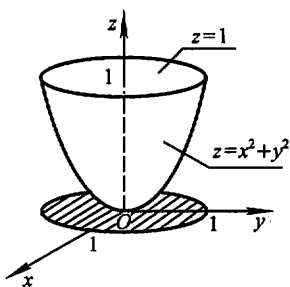


图 10-38

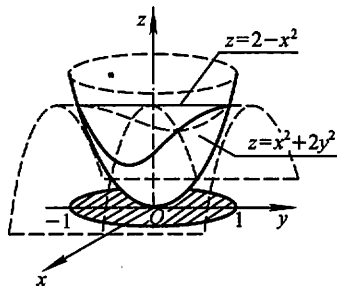


图 10-39

(4) 显然  $\Omega$  在  $xOy$  面上的投影区域由椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (x \geq 0, y \geq 0)$  和  $x$  轴、 $y$  轴所围成,  $\Omega$  的顶为  $cz = xy$ , 底为  $z = 0$  (图 10-40). 故  $\Omega$  可用不等式表示为

$$0 \leq z \leq \frac{xy}{c}, 0 \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, 0 \leq x \leq a,$$

因此

$$I = \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int_0^{\frac{xy}{c}} f(x, y, z) dz.$$

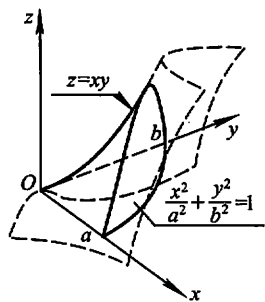


图 10-40

注 本题中的 4 个小题, 除第 2 小题外,  $\Omega$  的图形都不易画出. 但是, 为确定三次积分的积分限, 并非必须画出  $\Omega$  的准确图形. 重要的是要会求出  $\Omega$  在坐标面上的投影区域, 以及会定出  $\Omega$  的顶和底面, 而做到这点, 只需掌握常见曲面的方程和图形特点, 并具备一定的空间想像能力即可. 本章题解中配了较多插图, 请读者注意观察, 这对培养空间想像能力是有好处的.

2. 设有一物体, 占有空间闭区域  $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ , 在点  $(x, y, z)$  处的密度为  $\rho(x, y, z) = x + y + z$ , 计算该物体的质量.

$$\begin{aligned} \text{解 } M &= \iiint_{\Omega} \rho dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + y + z) dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2}\right) dy = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

3. 如果三重积分  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  的被积函数  $f(x, y, z)$  是三个函数  $f_1(x), f_2(y), f_3(z)$  的乘积, 即  $f(x, y, z) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$ , 积分区域  $\Omega = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, l \leq z \leq m\}$ , 证明这个三重积分等于三个单积

分的乘积,即

$$\iiint_{\Omega} f_1(x)f_2(y)f_3(z)dx dy dz = \int_a^b f_1(x)dx \int_c^d f_2(y)dy \int_l^m f_3(z)dz.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } \iiint_{\Omega} f_1(x)f_2(y)f_3(z)dx dy dz &= \int_a^b \left[ \int_c^d \left( \int_l^m f_1(x)f_2(y)f_3(z)dz \right) dy \right] dx \\ &= \int_a^b \left[ \int_c^d \left( f_1(x)f_2(y) \cdot \int_l^m f_3(z)dz \right) dy \right] dx \\ &= \int_a^b \left[ \left( \int_l^m f_3(z)dz \right) \cdot \left( \int_c^d f_1(x)f_2(y)dy \right) \right] dx \\ &= \left( \int_l^m f_3(z)dz \right) \cdot \int_a^b \left[ f_1(x) \cdot \int_c^d f_2(y)dy \right] dx \\ &= \int_l^m f_3(z)dz \cdot \int_c^d f_2(y)dy \cdot \int_a^b f_1(x)dx = \text{右端}. \end{aligned}$$

4. 计算  $\iiint_{\Omega} xy^2z^3 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z=xy$ , 平面  $y=x, x=1$  和  $z=0$  所围成的闭区域.

解 如图 10-41,  $\Omega$  可用不等式表示为:

$$0 \leq z \leq xy, 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1.$$

因此

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} xy^2z^3 dx dy dz &= \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z^3 dz \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 x dx \int_0^x x^4 y^6 dy = \frac{1}{28} \int_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{364}. \end{aligned}$$

5. 计算  $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$ , 其中  $\Omega$  为平面  $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$  所围成的四面体.

解  $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 1-x-y, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$  (图 10-42), 于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[ \frac{-1}{2(1+x+y+z)^2} \right]_0^{1-x-y} dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[ -\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2} \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[ -\frac{y}{8} - \frac{1}{2(1+x+y)} \right]_0^{1-x} dx \\ &= - \int_0^1 \left[ \frac{1-x}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(1+x)} \right] dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \ln 2 - \frac{5}{8} \right).$$

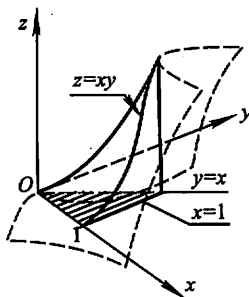


图 10-41

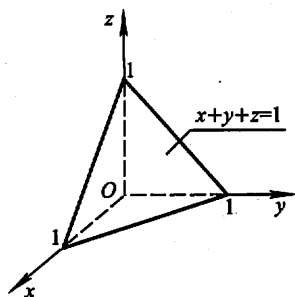


图 10-42

6. 计算  $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

解法一 利用直角坐标计算. 由于

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1\},$$

故

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} xyz dx dy dz &= \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz \\ &= \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \cdot \frac{1-x^2-y^2}{2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x \left[ \frac{y^2}{2} (1-x^2) - \frac{y^4}{4} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 x (1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

\* 解法二 利用球面坐标计算, 由于

$$\Omega = \{(r, \varphi, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},$$

故

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} xyz dx dy dz &= \iiint_{\Omega} (r^3 \sin^2 \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta) \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^1 r^5 dr \\ &= \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[ \frac{\sin^4 \varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[ \frac{r^6}{6} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48}.$$

**注** 比较本题的两种解法,显然用球面坐标计算要简便得多,这是由本题的积分区域 $\Omega$ 的形状所决定的.一般说来,凡是 $\Omega$ 由球面、圆锥面等曲面围成时,用球面坐标计算三重积分较为方便.

7. 计算 $\iiint_{\Omega} xz dx dy dz$ , 其中 $\Omega$ 是由平面 $z=0, z=y, y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

**解法一** 容易看出, $\Omega$ 的顶为平面 $z=y$ ,底为平面 $z=0$ , $\Omega$ 在 $xOy$ 面上的投影区域 $D_{xy}$ 由 $y=1$ 和 $y=x^2$ 所围成.故 $\Omega$ 可用不等式表示为

$$0 \leq z \leq y, x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1.$$

因此

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} xz dx dy dz &= \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^y z dz \\ &= \int_{-1}^1 x dx \int_{x^2}^1 \frac{y^2}{2} dy = \frac{1}{6} \int_{-1}^1 x(1-x^6) dx = 0. \end{aligned}$$

**解法二** 由于积分区域 $\Omega$ 关于 $yOz$ 面对称(即若点 $(x, y, z) \in \Omega$ , 则 $(-x, y, z)$ 也属于 $\Omega$ ),且被积函数 $xz$ ,关于 $x$ 是奇函数(即 $(-x)z = -(xz)$ ),因此

$$\iiint_{\Omega} xz dx dy dz = 0.$$

8. 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中 $\Omega$ 是由锥面 $z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h$ ( $R>0, h>0$ )所围成的闭区域.

**解法一** 由 $z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=h$ 消去 $z$ ,得

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

故 $\Omega$ 在 $xOy$ 面上的投影区域 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$ (图 10-43),

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \left| \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq h, (x, y) \in D_{xy} \right. \right\}.$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^h z dz \\ &= \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} \left[ h^2 - \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2) \right] dx dy \\ &= \frac{1}{2} \left[ h^2 \iint_{D_{xy}} dx dy - \frac{h^2}{R^2} \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2) dx dy \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{h^2}{2} \cdot \pi R^2 - \frac{h^2}{2R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{1}{4} \pi R^2 h^2.$$

**解法二** 用过点 $(0,0,z)$ 、平行于 $xOy$ 面的平面截 $\Omega$ 得平面圆域 $D_z$ ,其半径为 $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{Rz}{h}$ ,面积为 $\frac{\pi R^2}{h^2}z^2$ (图10-43).

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D_z, 0 \leq z \leq h\}.$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \int_0^h z dz \iint_{D_z} dx dy \\ &= \int_0^h z \cdot \frac{\pi R^2}{h^2} z^2 dz = \frac{\pi R^2}{4h^2} \cdot h^4 = \frac{1}{4} \pi R^2 h^2. \end{aligned}$$

**注** 解法二通俗地称为“先重后单”法,即先在 $D_z$ 上作关于 $x,y$ 的二重积分,然后再对 $z$ 作定积分.如果在 $D_z$ 上关于 $x$ 和 $y$ 的二重积分易于计算,特别地,如果被积函数与 $x,y$ 无关,且 $D_z$ 的面积容易表达为 $z$ 的函数,则采用这种方法比较简便.

**解法三** 用球面坐标进行计算.在球面坐标系中,圆锥面 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 的方程为 $\varphi=$

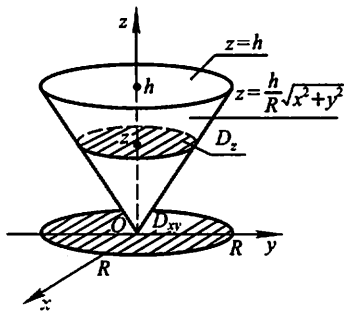


图 10-43

$\alpha (= \arctan \frac{R}{h})$ , 平面 $z=h$ 的方程为 $r=h \sec \varphi$ , 因此 $\Omega$ 可表示为

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \alpha, 0 \leq r \leq h \sec \varphi.$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \iiint_{\Omega} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{h \sec \varphi} r^3 dr \\ &= 2\pi \int_0^{\alpha} \frac{h^4 \sin \varphi}{4 \cos^3 \varphi} d\varphi = -\frac{\pi h^4}{2} \int_0^{\alpha} \frac{d(\cos \varphi)}{\cos^3 \varphi} \\ &= \frac{\pi h^4}{4} \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) \quad (\text{代入 } \alpha = \arctan \frac{R}{h}) \\ &= \frac{\pi h^4}{4} \left( \frac{R^2 + h^2}{h^2} - 1 \right) = \frac{1}{4} \pi R^2 h^2. \end{aligned}$$

9. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

- (1)  $\iiint_{\Omega} z dv$ , 其中 $\Omega$ 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域;

(2)  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $x^2 + y^2 = 2z$  及平面  $z = 2$  所围成的闭区域.

解 (1) 由  $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$  和  $z = x^2 + y^2$  消去  $z$ , 得

$$(x^2 + y^2)^2 = 2 - (x^2 + y^2), \text{ 即 } x^2 + y^2 = 1.$$

从而知  $\Omega$  在  $xOy$  面上的投影区域为  $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  (图 10-44). 利用柱面坐标,  $\Omega$  可表示为

$$\rho^2 \leq z \leq \sqrt{2 - \rho^2}, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dv &= \iiint_{\Omega} z \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho (2 - \rho^2 - \rho^4) d\rho \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \left[ \rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right]_0^1 = \frac{7}{12}\pi. \end{aligned}$$

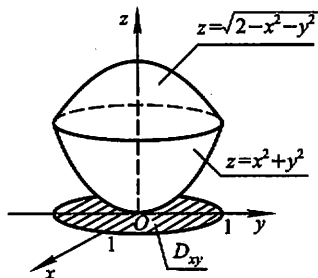


图 10-44

(2) 由  $x^2 + y^2 = 2z$  及  $z = 2$  消去  $z$  得  $x^2 + y^2 = 4$ , 从而知  $\Omega$  在  $xOy$  面上的投影区域为  $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ . 利用柱面坐标,  $\Omega$  可表示为

$$\frac{\rho^2}{2} \leq z \leq 2, 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv &= \iiint_{\Omega} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^2 dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 \left( 2 - \frac{\rho^2}{2} \right) d\rho = 2\pi \left[ \frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^6}{12} \right]_0^2 = \frac{16}{3}\pi. \end{aligned}$$

\* 10. 利用球面坐标计算下列三重积分:

(1)  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$ , 其中  $\Omega$  是由球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  所围成的闭区域;

(2)  $\iiint_{\Omega} z dv$ , 其中闭区域  $\Omega$  由不等式  $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \leq z^2$

所确定.

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv &= \iiint_{\Omega} r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr \\ &= 2\pi [-\cos \varphi]_0^{\pi} \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4}{5}\pi. \end{aligned}$$

(2) 在球面坐标系中, 不等式  $x^2 + y^2 + (z-a)^2 \leq a^2$ , 即  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$ , 变为  $r^2 \leq 2ar \cos \varphi$ , 即  $r \leq 2a \cos \varphi$ ;  $x^2 + y^2 \leq z^2$  变为  $r^2 \sin^2 \varphi \leq r^2 \cos^2 \varphi$ , 即  $\tan \varphi \leq 1$ , 亦即  $\varphi \leq \frac{\pi}{4}$ . 因此  $\Omega$  可表示为

$$0 \leq r \leq 2a \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ (图 10-45).}$$

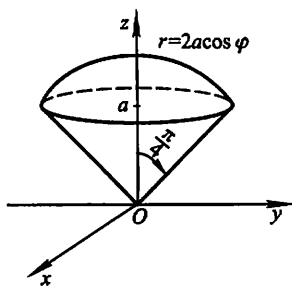


图 10-45

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z \, dv &= \iiint_{\Omega} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^3 \, dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \sin \varphi \cdot \frac{1}{4} (2a \cos \varphi)^4 \, d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4a^4 \cos^5 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \\ &= 8\pi a^4 \left[ -\frac{\cos^6 \varphi}{6} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{6} \pi a^4. \end{aligned}$$

11. 选用适当的坐标计算下列三重积分:

(1)  $\iiint_{\Omega} xy \, dv$ , 其中  $\Omega$  为柱面  $x^2 + y^2 = 1$  及平面  $z = 1, z = 0, x = 0, y = 0$

所围成的在第一卦限内的闭区域;

(2)  $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dv$ , 其中  $\Omega$  是由球面  $x^2 + y^2 + z^2 = z$  所围成的闭区域;

(3)  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dv$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $4z^2 = 25(x^2 + y^2)$  及平面  $z = 5$  所围成的闭区域;

(4)  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dv$ , 其中闭区域  $\Omega$  由不等式  $0 < a \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq A, z \geq 0$  所确定.

解 (1) 利用柱面坐标计算.  $\Omega$  可表示为

$$0 \leq z \leq 1, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\iiint_{\Omega} xy \, dv = \iiint_{\Omega} \rho^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \rho \, d\rho \, d\theta \, dz$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^1 dz \\
 &= \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \left[ z \right]_0^1 = \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

\* (2) 在球面坐标系中, 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = z$  的方程为  $r^2 = r \cos \varphi$ , 即  $r = \cos \varphi$ .  $\Omega$  可表示为

$$0 \leq r \leq \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ (图 10-46).}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv &= \iiint_{\Omega} r \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^3 dr \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cdot \frac{\cos^4 \varphi}{4} d\varphi \\
 &= -\frac{\pi}{2} \left[ \frac{\cos^5 \varphi}{5} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{10}.
 \end{aligned}$$

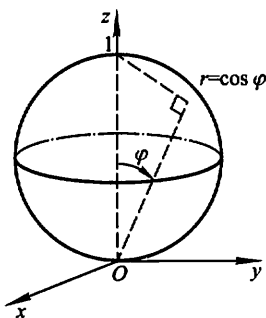


图 10-46

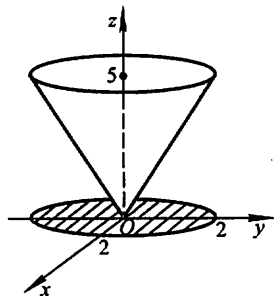


图 10-47

(3) 利用柱面坐标计算.  $\Omega$  可表示为

$\frac{5}{2}\rho \leq z \leq 5, 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$  (图 10-47), 于是

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv &= \iiint_{\Omega} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\frac{5}{2}\rho}^5 dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 \left( 5 - \frac{5}{2}\rho \right) d\rho \\
 &= 2\pi \left[ \frac{5}{4}\rho^4 - \frac{1}{2}\rho^5 \right]_0^2 = 8\pi.
 \end{aligned}$$

\* (4) 在球面坐标系中,  $\Omega$  可表示为

$$a \leq r \leq A, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv &= \iiint_{\Omega} r^2 \sin^2 \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi \int_a^A r^4 dr \\ &= 2\pi \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{A^5 - a^5}{5}\right) = \frac{4\pi}{15} (A^5 - a^5). \end{aligned}$$

12. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积:

- (1)  $z = 6 - x^2 - y^2$  及  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ;  
 \* (2)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$  ( $a > 0$ ) 及  $x^2 + y^2 = z^2$  (含有  $z$  轴的部分);  
 (3)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  及  $z = x^2 + y^2$  ;  
 (4)  $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$  及  $x^2 + y^2 = 4z$ .

解 (1) 利用直角坐标计算. 由  $z = 6 - x^2 - y^2$  和  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  消去  $z$ , 解得  $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$ , 即  $\Omega$  在  $xOy$  面上的投影区域  $D_{xy}$  为  $x^2 + y^2 \leq 4$ . 于是

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2), x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

因此

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dv = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^{6 - (x^2 + y^2)} dz \\ &= \iint_{D_{xy}} [6 - (x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + y^2}] dx dy \text{ (用极坐标)} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (6 - \rho^2 - \rho) \rho d\rho \\ &= 2\pi \left[ 3\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3} \right]_0^2 = \frac{32}{3}\pi. \end{aligned}$$

注 本题也可用“先重后单”的积分次序求解:

对固定的  $z$ , 当  $0 \leq z \leq 2$  时,  $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq z^2\}$ ; 当  $2 \leq z \leq 6$  时,  $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 6 - z\}$  (图 10-48).

于是

$$V = V_1 + V_2 = \int_0^2 dz \iint_{D_z} dx dy + \int_2^6 dz \iint_{D_z} dx dy$$

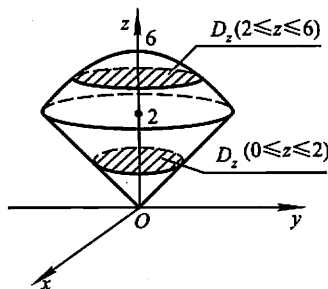


图 10-48

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^2 \pi z^2 dz + \int_2^6 \pi(6-z) dz \\
 &= \frac{8}{3} \pi + 8\pi = \frac{32}{3} \pi.
 \end{aligned}$$

\* (2) 利用球面坐标计算. 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$  及圆锥面  $x^2 + y^2 = z^2$  的球面坐标方程分别为  $r = 2a \cos \varphi$  和  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , 故

$$\Omega = \{(r, \varphi, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2a \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \text{ (图 10-45).}$$

于是

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^2 dr \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8a^3}{3} \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi \\
 &= \frac{16\pi a^3}{3} \left[ -\frac{1}{4} \cos^4 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi a^3.
 \end{aligned}$$

注 本题若用“先重后单”的方法计算也很简便.

由  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$  和  $x^2 + y^2 = z^2$  解得  $z = a$ . 对固定的  $z$ , 当  $0 \leq z \leq a$  时,  $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq z^2\}$ ; 当  $a \leq z \leq 2a$  时,  $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2az - z^2\}$ . 于是

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 + V_2 = \int_0^a dz \iint_{D_z} dx dy + \int_a^{2a} dz \iint_{D_z} dx dy \\
 &= \int_0^a \pi z^2 dz + \int_a^{2a} \pi(2az - z^2) dz \\
 &= \frac{1}{3} \pi a^3 + \frac{2}{3} \pi a^3 = \pi a^3.
 \end{aligned}$$

(3) 利用柱面坐标计算. 曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  和  $z = x^2 + y^2$  的柱面坐标方程分别为  $z = \rho$  和  $z = \rho^2$ . 消去  $z$ , 得  $\rho = 1$ , 故它们所围的立体在  $xOy$  面上的投影区域为  $\rho \leq 1$  (图 10-49). 因此

$$\Omega = \{(\rho, \theta, z) \mid \rho^2 \leq z \leq \rho, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

于是

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega} \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^{\rho} dz \\
 &= 2\pi \int_0^1 \rho(\rho - \rho^2) d\rho = \frac{\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

(本题也可用“先重后单”的方法方便地求得结果,读者可自己练习.)

(4) 在直角坐标系中用“先重后单”的方法计算. 由  $z = \sqrt{5-x^2-y^2}$  和  $x^2+y^2 = 4z$  可解得  $z = 1$ .

对固定的  $z$ , 当  $0 \leq z \leq 1$  时,  $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4z\}$ ; 当  $1 \leq z \leq \sqrt{5}$  时,  $D_z = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 5 - z^2\}$  (图 10-50).

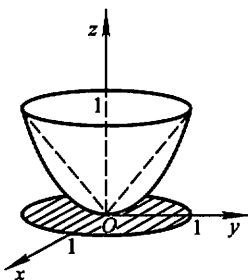


图 10-49

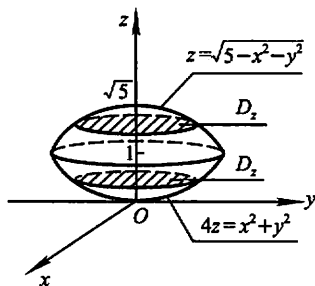


图 10-50

于是

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 = \int_0^1 dz \iint_{D_z} dx dy + \int_1^{\sqrt{5}} dz \iint_{D_z} dx dy \\ &= \int_0^1 \pi(4z) dz + \int_1^{\sqrt{5}} \pi(5 - z^2) dz \\ &= 2\pi + \pi \left[ 5z - \frac{z^3}{3} \right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} - 4). \end{aligned}$$

(本题用柱面坐标计算也很方便,请读者自己练习.)

13. 求球体  $r \leq a$  位于锥面  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  和  $\varphi = \frac{2}{3}\pi$  之间的部分的体积.

解 用球面坐标计算. 记  $\Omega$  为立体所占的空间区域, 有

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin \varphi d\varphi \int_0^a r^2 dr \\ &= \frac{2\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

14. 求上、下分别为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  和抛物面  $z = x^2 + y^2$  所围立体的体积.

解 由  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  和  $z = x^2 + y^2$  消去  $z$ , 解得  $x^2 + y^2 = 1$ . 从而得立体  $\Omega$  在  $xOy$  面上的投影区域  $D_{xy}$  为  $x^2 + y^2 \leq 1$ . 于是

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

因此

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{D_{xy}} [\sqrt{2-x^2-y^2} - (x^2+y^2)] dx dy \text{ (用极坐标)} \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\sqrt{2-\rho^2} - \rho^2) \rho d\rho \\
&= \frac{8\sqrt{2}-7}{6} \pi.
\end{aligned}$$

注 本题也可用“先重后单”的方法按下式方便地求得结果:

$$\begin{aligned}
V &= \int_1^{\sqrt{2}} dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2-z^2} dx dy + \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leq z} dx dy \\
&= \pi \int_1^{\sqrt{2}} (2-z^2) dz + \pi \int_0^1 z dz \\
&= \frac{4\sqrt{2}-5}{3} \pi + \frac{1}{2} \pi = \frac{8\sqrt{2}-7}{6} \pi.
\end{aligned}$$

\* 15. 球心在原点、半径为  $R$  的球体,在其上任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比,求这球体的质量.

解 用球面坐标计算.  $\Omega$  为  $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ , 即  $r \leq R$ . 按题设, 密度函数  $\mu(x, y, z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2} = kr (k > 0)$ . 于是

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} kr \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\
&= k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^3 dr \\
&= k \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^4}{4} = k\pi R^4.
\end{aligned}$$

## 习题 10-4

## 重积分的应用

1. 求球面  $x^2+y^2+z^2=a^2$  含在圆柱面  $x^2+y^2=ax$  内部的那部分面积.

解 如图 10-51, 上半球面的方程为  $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \\
\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} &= \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.
\end{aligned}$$

由曲面的对称性得所求面积为

$$A = 4 \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \xrightarrow{\text{(极坐标)}} 4a \iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\theta \\
 &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \frac{\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho \\
 &= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta = 2a^2(\pi - 2).
 \end{aligned}$$

2. 求锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $z^2 = 2x$  所割下部分的曲面面积.

解 由  $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z^2 = 2x \end{cases}$  解得  $x^2 + y^2 = 2x$ , 故曲面在  $xOy$  面上的投影区域

$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$  (图 10-52).

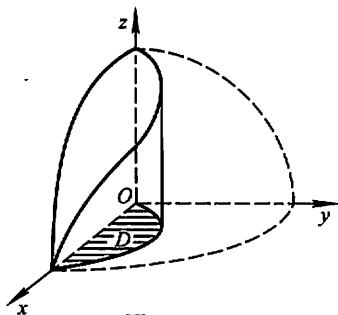


图 10-51

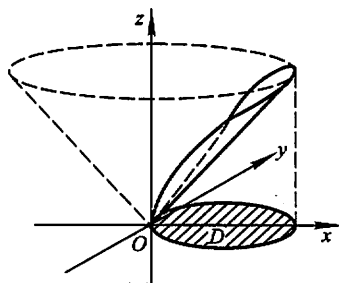


图 10-52

被割曲面的方程为  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2},$$

于是所求曲面的面积为

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_D \sqrt{2} dx dy \xrightarrow{\text{(对称性)}} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \sqrt{2} \rho d\rho \\
 &= 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\
 &= \sqrt{2}\pi.
 \end{aligned}$$

3. 求底圆半径相等的两个直交圆柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  及  $x^2 + z^2 = R^2$  所围立体的表面积.

解 如图 10-53, 设第一卦限内的立体表面位于圆柱面  $x^2 + z^2 = R^2$  上的那一部分的面积为  $A$ , 则由对称性知全部表面的面积为  $16A$ .

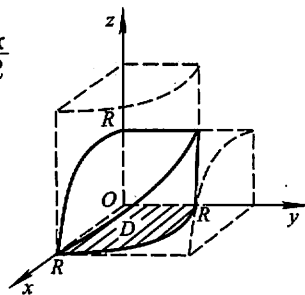


图 10-53

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} + 0} dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx dy = R \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \\
 &= R \int_0^R dx = R^2,
 \end{aligned}$$

故全部表面积为  $16R^2$ .

4. 设薄片所占的闭区域  $D$  如下, 求均匀薄片的质心:

(1)  $D$  由  $y = \sqrt{2px}$ ,  $x = x_0$ ,  $y = 0$  所围成;

(2)  $D$  是半椭圆形闭区域  $\{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0\}$ ;

(3)  $D$  是介于两个圆  $r = a \cos \theta$ ,  $r = b \cos \theta$  ( $0 < a < b$ ) 之间的闭区域.

解 (1) 设质心为  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_D dx dy = \int_0^{x_0} dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \int_0^{x_0} \sqrt{2px} dx \\
 &= \frac{2}{3} \sqrt{2px_0^3};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_D x dx dy &= \int_0^{x_0} x dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \int_0^{x_0} \sqrt{2px}^{\frac{3}{2}} dx \\
 &= \frac{2}{5} \sqrt{2px_0^5};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_D y dx dy &= \int_0^{x_0} dx \int_0^{\sqrt{2px}} y dy = \int_0^{x_0} px dx \\
 &= \frac{px_0^2}{2},
 \end{aligned}$$

$$\text{于是 } \bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x dx dy = \frac{3}{5} x_0, \bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{3}{8} \sqrt{2px_0} = \frac{3}{8} y_0,$$

故所求质心为  $(\frac{3}{5} x_0, \frac{3}{8} y_0)$ .

(2) 因  $D$  对称于  $y$  轴, 故质心  $(\bar{x}, \bar{y})$  必位于  $y$  轴上, 于是  $\bar{x} = 0$ .

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{1}{A} \int_{-a}^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} y dy \\
 &= \frac{1}{A} \int_{-a}^a \frac{b^2}{2a^2} (a^2 - x^2) dx \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{2} \pi ab} \cdot \frac{2}{3} ab^2 = \frac{4b}{3\pi}.
 \end{aligned}$$

因此所求质心为  $(0, \frac{4b}{3\pi})$ .

(3) 因  $D$  对称于  $x$  轴, 故质心  $(\bar{x}, \bar{y})$  位于  $x$  轴上, 于是  $\bar{y} = 0$  (图 10-54).

$$A = \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(b^2 - a^2),$$

$$\begin{aligned}\iint_D x dx dy &= \iint_D \rho \cos \theta \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_{a \cos \theta}^{b \cos \theta} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{2}{3}(b^3 - a^3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{3}(b^3 - a^3) \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}(b^3 - a^3),\end{aligned}$$

故

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x dx dy = \frac{a^2 + ab + b^2}{2(a+b)}.$$

所求质心为  $\left(\frac{a^2 + ab + b^2}{2(a+b)}, 0\right)$ .

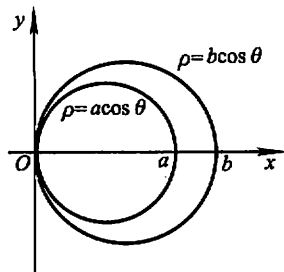


图 10-54

5. 设平面薄片所占的闭区域  $D$  由抛物线  $y = x^2$  及直线  $y = x$  所围成, 它在点  $(x, y)$  处的面密度  $\mu(x, y) = x^2 y$ , 求该薄片的质心.

解

$$\begin{aligned}M &= \iint_D x^2 y dx dy = \int_0^1 x^2 dx \int_{x^2}^x y dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(x^4 - x^6) dx = \frac{1}{35}; \\ M_x &= \iint_D y \mu(x, y) dx dy = \iint_D x^2 y^2 dx dy \\ &= \int_0^1 x^2 dx \int_{x^2}^x y^2 dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3}(x^5 - x^8) dx = \frac{1}{54}; \\ M_y &= \iint_D x \mu(x, y) dx dy = \iint_D x^3 y dx dy \\ &= \int_0^1 x^3 dx \int_{x^2}^x y dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(x^5 - x^7) dx = \frac{1}{48},\end{aligned}$$

于是

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{35}{48}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{35}{54}.$$

所求质心为  $\left(\frac{35}{48}, \frac{35}{54}\right)$ .



6. 设有一等腰直角三角形薄片, 腰长为  $a$ , 各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方, 求这薄片的质心.

解 如图 10-55, 按题设, 面密度  $\mu(x, y) = x^2 + y^2$ . 由对称性知  $\bar{x} = \bar{y}$ .

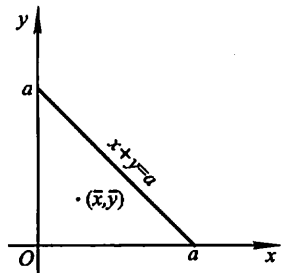


图 10-55

$$M = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy$$

$$= \int_0^a \left[ x^2(a-x) + \frac{(a-x)^3}{3} \right] dx = \frac{1}{6} a^4;$$

$$M_y = \iint_D x(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^a x dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy$$

$$= \int_0^a \left[ x^3(a-x) + \frac{x(a-x)^3}{3} \right] dx$$

$$= \int_0^a \left( -\frac{4}{3}x^4 + 2ax^3 - a^2x^2 + \frac{a^3}{3}x \right) dx = \frac{1}{15} a^5,$$

因此 
$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2}{5}a, \bar{y} = \bar{x} = \frac{2}{5}a.$$

所求质心为  $\left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a\right)$ .

7. 利用三重积分计算下列由曲面所围立体的质心(设密度  $\rho = 1$ ):

(1)  $z^2 = x^2 + y^2, z = 1$ ;

(2)  $z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} (A > a > 0), z = 0$ ;

(3)  $z = x^2 + y^2, x + y = a, x = 0, y = 0, z = 0$ .

解 (1) 曲面所围立体为圆锥体, 其顶点在原点, 并关于  $z$  轴对称, 又由于它是匀质的, 因此它的质心位于  $z$  轴上, 即有  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ . 立体的体积为  $V = \frac{1}{3}\pi$ .

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_D z dv = \frac{1}{V} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 z dz$$

$$= \frac{1}{V} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{2} (1 - x^2 - y^2) dx dy$$

$$= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - \rho^2) \rho d\rho$$

$$= \frac{3}{\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{4},$$

故所求质心为  $\left(0, 0, \frac{3}{4}\right)$ .

(2) 立体由两个同心的上半球面和  $xOy$  面所围成, 关于  $z$  轴对称, 又由于它

是匀质的,故其质心位于  $z$  轴上,即有  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ . 立体的体积为

$$V = \frac{2}{3}\pi(A^3 - a^3).$$

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dv = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_a^A r^3 dr \\ &= \frac{3}{2\pi(A^3 - a^3)} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{A^4 - a^4}{4} \\ &= \frac{3(A^4 - a^4)}{8(A^3 - a^3)},\end{aligned}$$

故立体质心为  $(0, 0, \frac{3(A^4 - a^4)}{8(A^3 - a^3)})$ .

(3) 如图 10-56,  $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$ .

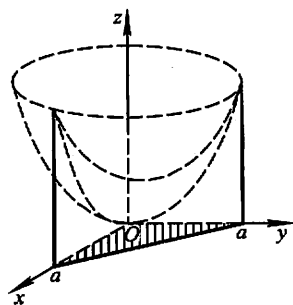


图 10-56

$$\begin{aligned}V &= \iiint_{\Omega} dv = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz \\ &= \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_0^a \left[ x^2(a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3 \right] dx \\ &= \int_0^a \left[ ax^2 - x^3 + \frac{1}{3}(a-x)^3 \right] dx = \frac{1}{6}a^4; \\ \bar{z} &= \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} z dv = \frac{1}{V} \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} z dz \\ &= \frac{1}{V} \int_0^a dx \int_0^{a-x} \frac{1}{2} (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dy \\ &= \frac{1}{2V} \int_0^a \left[ x^4(a-x) + \frac{2}{3}x^2(a-x)^3 + \frac{1}{5}(a-x)^5 \right] dx \\ &= \frac{3}{a^4} \cdot \frac{7a^6}{90} = \frac{7}{30}a^2; \\ \bar{x} &= \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} x dv = \frac{1}{V} \int_0^a x dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz \\ &= \frac{1}{V} \int_0^a x \left[ x^2(a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3 \right] dx \\ &= \frac{6}{a^4} \cdot \frac{a^5}{15} = \frac{2}{5}a,\end{aligned}$$

由于立体匀质且关于平面  $y = x$  对称,故

$$\bar{y} = \bar{x} = \frac{2}{5}a.$$

所求质心为  $(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a, \frac{7}{30}a^2)$ .

\* 8. 设球体占有闭区域  $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}$ , 它在内部各点处的密度的大小等于该点到坐标原点的距离的平方. 试求这球体的质心.

解 在球面坐标系中,  $\Omega$  可表示为

$$0 \leq r \leq 2R \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

球体内任意一点  $(x, y, z)$  处的密度大小为

$$\rho = x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

由于球体的几何形状及质量分布均关于  $z$  轴对称, 故可知其质心位于  $z$  轴上, 因此  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ .

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\Omega} \rho dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{32}{5} R^5 \cos^5 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{32}{15} \pi R^5; \\ \bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} \rho z dv = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^2 \cdot r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &= \frac{2\pi}{M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{64}{6} R^6 \cos^7 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{5}{4} R, \end{aligned}$$

故球体的质心为  $(0, 0, \frac{5}{4}R)$ .

注 从以上两题的题解可看出, 在计算立体的质心时, 要注意利用对称性来减少运算量. 对匀质立体来说, 只要考虑立体几何形状的对称性(如第 7 题); 但对非匀质立体来说, 除了立体的几何形状的对称性外, 还需注意立体的质量分布是否也具有相应的对称性(如第 8 题).

9. 设均匀薄片(面密度为常数 1)所占闭区域  $D$  如下, 求指定的转动惯量:

(1)  $D = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ , 求  $I_y$ ;

(2)  $D$  由抛物线  $y^2 = \frac{9}{2}x$  与直线  $x = 2$  所围成, 求  $I_x$  和  $I_y$ ;

(3)  $D$  为矩形闭区域  $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ , 求  $I_x$  和  $I_y$ .

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad I_y &= \iint_D x^2 dx dy = \int_{-a}^a x^2 dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \\ &= \frac{2b}{a} \int_{-a}^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{4b}{a} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

令  $x = a \sin t$ , 换元, 则

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin^2 t \cos t \cdot a \cos t dt \\ &= 4a^3 b \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt \right] \\ &= 4a^3 b \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{4} \pi a^3 b. \end{aligned}$$

(2) 如图 10-57,  $D = \left\{ (x, y) \mid -3\sqrt{\frac{x}{2}} \leq y \leq 3\sqrt{\frac{x}{2}}, 0 \leq x \leq 2 \right\}$ .

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} 2 \int_0^2 dx \int_0^{3\sqrt{\frac{x}{2}}} y^2 dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^2 \frac{27}{2\sqrt{2}} x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{72}{5}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_D x^2 dx dy \stackrel{\text{对称性}}{=} 2 \int_0^2 x^2 dx \int_0^{3\sqrt{\frac{x}{2}}} dy \\ &= 2 \int_0^2 \frac{3}{\sqrt{2}} x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{96}{7}. \end{aligned}$$

$$(3) \quad I_x = \iint_D y^2 dx dy = \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy = \frac{ab^3}{3};$$

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_0^a x^2 dx \int_0^b dy = \frac{a^3 b}{3}.$$

10. 已知均匀矩形板(面密度为常量  $\mu$ )的长和宽分别为  $b$  和  $h$ , 计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.

解 建立如图 10-58 的坐标系, 使原点  $O$  为矩形板的形心,  $x$  轴和  $y$  轴分别平行于矩形的两边, 则所求的转动惯量为

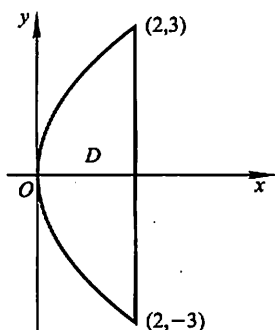


图 10-57

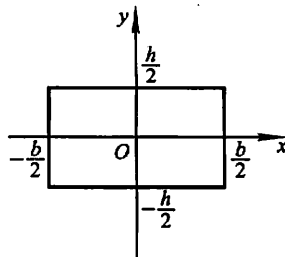


图 10-58

$$I_x = \iint_D y^2 \mu dx dy = \mu \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2 dy = \frac{1}{12} \mu b h^3;$$

$$I_y = \iint_D x^2 \mu dx dy = \mu \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy = \frac{1}{12} \mu h b^3.$$

11. 一均匀物体(密度  $\rho$  为常量)占有的闭区域  $\Omega$  由曲面  $z = x^2 + y^2$  和平面  $z = 0, |x| = a, |y| = a$  所围成,

(1) 求物体的体积;

(2) 求物体的质心;

(3) 求物体关于  $z$  轴的转动惯量.

解 (1) 如图 10-59, 由  $\Omega$  的对称性可知

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{x^2+y^2} dz \\ &= 4 \int_0^a dx \int_0^a (x^2 + y^2) dy \\ &= 4 \int_0^a \left( ax^2 + \frac{a^3}{3} \right) dx = \frac{8}{3} a^4. \end{aligned}$$

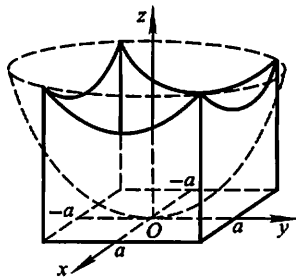


图 10-59

(2) 由对称性可知, 质心位于  $z$  轴上, 故  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ .

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} \rho z dv \stackrel{\text{对称性}}{=} \frac{4}{V} \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{x^2+y^2} z dz \\ &= \frac{4}{V} \int_0^a dx \int_0^a \frac{1}{2} (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) dy \\ &= \frac{2}{V} \int_0^a \left( ax^4 + \frac{2}{3} a^3 x^2 + \frac{1}{5} a^5 \right) dx = \frac{7}{15} a^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad I_z &= \iiint_{\Omega} \rho (x^2 + y^2) dv \stackrel{\text{对称性}}{=} 4 \rho \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^{x^2+y^2} (x^2 + y^2) dz \\ &= 4 \rho \int_0^a dx \int_0^a (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) dy \\ &= \frac{112}{45} \rho a^6. \end{aligned}$$

12. 求半径为  $a$ 、高为  $h$  的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量(设密度  $\rho = 1$ ).

解 建立空间直角坐标系, 使原点位于圆柱体的中心,  $z$  轴平行于母线, 则圆柱体所占的空间闭区域

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right\} \\ &\stackrel{\text{柱面坐标}}{=} \left\{ (\rho, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq a, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right\}. \end{aligned}$$

于是所求的转动惯量为

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = \iiint_{\Omega} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \\ &= 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} \cdot h = \frac{1}{2} \pi h a^4. \end{aligned}$$

13. 设面密度为常量  $\mu$  的匀质半圆环形薄片占有闭区域  $D = \{(x, y, 0) \mid R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_2, x \geq 0\}$ , 求它对位于  $z$  轴上点  $M_0(0, 0, a) (a > 0)$  处单位质量的质点的引力  $F$ .

解 如图 10-60, 引力元素  $dF$  沿  $x$  轴和  $z$  轴的分量分别为

$$dF_x = G \frac{\mu x}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma$$

和 
$$dF_z = G \frac{\mu(-a)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma.$$

于是 
$$F_x = G\mu \iint_D \frac{x}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma$$

$$\stackrel{\text{极坐标}}{=} G\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho \cos \theta}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \rho d\rho$$

$$= G\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho$$

$$= 2G\mu \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho \quad (\text{令 } \rho = a \tan t \text{ 换元})$$

$$= 2G\mu \int_{\arctan \frac{R_1}{a}}^{\arctan \frac{R_2}{a}} \frac{a^2 \tan^2 t}{a^3 \sec^3 t} \cdot a \sec^2 t dt$$

$$= 2G\mu \int_{\arctan \frac{R_1}{a}}^{\arctan \frac{R_2}{a}} (\sec t - \cos t) dt$$

$$= 2G\mu \left[ \ln(\sec t + \tan t) - \sin t \right]_{\arctan \frac{R_1}{a}}^{\arctan \frac{R_2}{a}}$$

$$= 2G\mu \left[ \ln \frac{\sqrt{R_2^2 + a^2} + R_2}{\sqrt{R_1^2 + a^2} + R_1} - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + a^2}} + \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + a^2}} \right];$$

$$F_z = -Ga\mu \iint_D \frac{d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

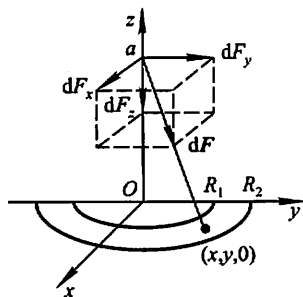


图 10-60

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{\text{极坐标}} -Ga\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho \\
&= \pi Ga\mu \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \right]_{R_1}^{R_2} \\
&= \pi Ga\mu \left( \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + a^2}} \right),
\end{aligned}$$

由于  $D$  关于  $x$  轴对称, 且质量均匀分布, 故  $F_y = 0$ . 因此引力,

$$\begin{aligned}
F = & \left( 2G\mu \left[ \ln \frac{\sqrt{R_2^2 + a^2} + R_2}{\sqrt{R_1^2 + a^2} + R_1} - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + a^2}} + \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + a^2}} \right], 0, \right. \\
& \left. \pi Ga\mu \left( \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + a^2}} \right) \right).
\end{aligned}$$

14. 设均匀柱体密度为  $\rho$ , 占有闭区域  $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$ , 求它对于位于点  $M_0(0, 0, a)$  ( $a > h$ ) 处的单位质量的质点的引力.

解 由柱体的对称性和质量分布的均匀性知  $F_x = F_y = 0$ . 引力沿  $z$  轴的分量

$$\begin{aligned}
F_z = & \iiint_{\Omega} G\rho \frac{z-a}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{\frac{3}{2}}} dv \\
&= G\rho \int_0^h (z-a) dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dxdy}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
& \xrightarrow{\text{柱面坐标}} G\rho \int_0^h (z-a) dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{rdr}{[r^2 + (z-a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= 2\pi G\rho \int_0^h (z-a) \left[ \frac{1}{a-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z-a)^2}} \right] dz \\
&= 2\pi G\rho \int_0^h \left[ -1 - \frac{z-a}{\sqrt{R^2 + (z-a)^2}} \right] dz \\
&= -2\pi G\rho [h + \sqrt{R^2 + (h-a)^2} - \sqrt{R^2 + a^2}].
\end{aligned}$$

## 习题 10-5

## 含参变量的积分

1. 求下列含参变量的积分所确定的函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{1+x} \frac{dy}{1+x^2+y^2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+y^2} dy;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^2 y^2 \cos(xy) dy.$$

解 (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{1+x} \frac{dy}{1+x^2+y^2} = \int_0^{1+0} \frac{dy}{1+0+y^2} = [\arctan y]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + y^2} dy = \int_{-1}^1 |y| dy = 2 \int_0^1 y dy = 1.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^2 y^2 \cos(xy) dy = \int_0^2 y^2 (\cos 0) dy = \frac{8}{3}.$$

2. 求下列函数的导数:

$$(1) \varphi(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} (y^2 \sin x - y^3) dy; \quad (2) \varphi(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+xy)}{y} dy;$$

$$(3) \varphi(x) = \int_{x^2}^{x^3} \arctan \frac{y}{x} dy; \quad (4) \varphi(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \varphi'(x) &= \int_{\sin x}^{\cos x} y^2 \cos x dy + (\cos^2 x \sin x - \cos^3 x)(\cos x)' \\ &\quad - (\sin^2 x \sin x - \sin^3 x)(\sin x)' \\ &= \frac{1}{3} \cos x (\cos^3 x - \sin^3 x) + (\cos x - \sin x) \sin x \cos^2 x \\ &= \frac{1}{3} \cos x (\cos x - \sin x) (1 + 2 \sin 2x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \varphi'(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+xy} dy + \frac{\ln(1+x^2)}{x} \\ &= \frac{1}{x} [\ln(1+xy)]_0^x + \frac{\ln(1+x^2)}{x} \\ &= \frac{2}{x} \ln(1+x^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \varphi'(x) &= \int_{x^2}^{x^3} \left( -\frac{y}{x^2+y^2} \right) dy + \arctan x^2 \cdot 3x^2 - \arctan x \cdot 2x \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) \Big|_{x^2}^{x^3} + 3x^2 \arctan x^2 - 2x \arctan x \\ &= \ln \sqrt{\frac{1+x^2}{1+x^4}} + 3x^2 \arctan x^2 - 2x \arctan x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \varphi'(x) &= \int_x^{x^2} e^{-xy^2} (-y^2) dy + e^{-x^5} \cdot 2x - e^{-x^3} \cdot 1 \\ &= 2xe^{-x^5} - e^{-x^3} - \int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2} dy. \end{aligned}$$

3. 设  $F(x) = \int_0^x (x+y)f(y)dy$ , 其中  $f(y)$  为可微分的函数, 求  $F''(x)$ .

$$\text{解} \quad F'(x) = \int_0^x f(y) dy + 2xf(x);$$

$$F''(x) = f(x) + 2f(x) + 2xf'(x) = 3f(x) + 2xf'(x).$$

4. 应用对参数的微分法, 计算下列积分:

$$(1) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} \quad (|a| < 1);$$



$$(2) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + a^2 \sin^2 x) dx \quad (a > 0).$$

解 (1) 设  $\varphi(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a \cos x}{1 - a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x},$

则  $\varphi(0)=0, \varphi(a)=I$ . 由于

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( \ln \frac{1 + a \cos x}{1 - a \cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \frac{2}{1 - a^2 \cos^2 x},$$

故

$$\begin{aligned} \varphi'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1 - a^2 \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2d \tan x}{\sec^2 x - a^2} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \tan x}{(1 - a^2) + \tan^2 x} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 - a^2}} \left[ \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{1 - a^2}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 - a^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} I = \varphi(a) - \varphi(0) &= \int_0^a \varphi'(\alpha) d\alpha = \int_0^a \frac{\pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}} d\alpha \\ &= \pi \arcsin a. \end{aligned}$$

(2) 设  $\varphi(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + a^2 \sin^2 x) dx,$

则  $\varphi(1)=0, \varphi(a)=I$ . 由于

$$\frac{\partial}{\partial a} [\ln(\cos^2 x + a^2 \sin^2 x)] = \frac{2a \sin^2 x}{\cos^2 x + a^2 \sin^2 x},$$

故

$$\begin{aligned} \varphi'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a \sin^2 x}{\cos^2 x + a^2 \sin^2 x} dx \\ &\stackrel{u = \tan x}{=} 2a \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1 + a^2 u^2} \cdot \frac{du}{1 + u^2} \\ &= \frac{2a}{a^2 - 1} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} - \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + a^2 u^2} \right] (a \neq 1) \\ &= \frac{2a}{a^2 - 1} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2a} \right) = \frac{\pi}{a + 1}; \end{aligned}$$

又当  $a=1$  时,  $\varphi'(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2},$

因此  $\varphi'(a)$  在  $x=1$  处连续. 从而对任一  $a>0, \varphi'(a)$  在区间  $[1, a]$  (或  $[a, 1]$ ) 上连续. 于是

$$I = \varphi(a) - \varphi(1) = \int_1^a \varphi'(\alpha) d\alpha = \int_1^a \frac{\pi}{\alpha + 1} d\alpha$$

$$= \pi \ln \frac{a+1}{2}.$$

5. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(2) \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx (0 < a < b).$$

解 (1) 因为  $\frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2},$

故 原式  $= \int_0^1 \left[ \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2} \right] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{交换积分次序})$   
 $= \int_0^1 \left[ \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} \right] dy,$

由于

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} &\stackrel{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2\sin^2 t} \\ &\stackrel{u=\tan t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+(1+y^2)u^2} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} [\arctan(\sqrt{1+y^2}u)]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}, \end{aligned}$$

因此 原式  $= \int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}} dy = \frac{\pi}{2} [\ln(y+\sqrt{1+y^2})]_0^1$   
 $= \frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2}).$

(2) 因为  $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy,$

故  $\int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) dx \int_a^b x^y dy \quad (\text{交换积分次序})$   
 $= \int_a^b dy \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y dx.$

由于  $\int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y dx \stackrel{x=e^{-t}}{=} \int_{+\infty}^0 \sin t \cdot e^{-yt} (-e^{-t}) dt$   
 $= \int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-(y+1)t} dt \quad (\text{分部积分})$   
 $= \frac{1}{1+(y+1)^2} e^{-(y+1)t} [\cos t - (y+1)\sin t] \Big|_0^{+\infty}$   
 $= \frac{1}{1+(y+1)^2},$

因此

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_a^b \frac{1}{1+(y+1)^2} dy = [\arctan(y+1)]_a^b \\ &= \arctan(b+1) - \arctan(a+1).\end{aligned}$$

## 总习题十

1. 选择以下各题中给出的四个结论中一个正确的结论:

(1) 设有空间闭区域  $\Omega_1 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$ ,  $\Omega_2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ , 则有\_\_\_\_\_.

(A)  $\iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv.$

(B)  $\iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv.$

(C)  $\iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv.$

(D)  $\iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv.$

(2) 设有平面闭区域  $D = \{(x, y) | -a \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$ ,  $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, x \leq y \leq a\}$ . 则  $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy =$ \_\_\_\_\_.

(A)  $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy.$

(B)  $2 \iint_{D_1} xy dx dy.$

(C)  $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy.$

(D) 0.

(3) 设  $f(x)$  为连续函数,  $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$ , 则  $F'(2) =$ \_\_\_\_\_.

(A)  $2f(2).$

(B)  $f(2).$

(C)  $-f(2).$

(D) 0.

解 (1) 先说明(A)不正确. 由于  $\Omega_1$  关于  $yOz$  面对称, 而被积函数  $x$  关于  $x$  是奇函数, 故  $\iiint_{\Omega_1} x dv = 0$ , 而  $\iiint_{\Omega_2} x dv \neq 0$ , 故(A)不正确. 类似可说明(B)和(D)不正确. 再说明(C)是正确的. 设  $\Omega_3 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0, x \geq 0\}$ . 由于被积函数  $z$  关于  $x$  是偶函数, 而  $\Omega_3$  与  $\Omega_1 \setminus \Omega_3$ <sup>①</sup> 关于  $yOz$  面对称, 故  $\iiint_{\Omega_1} z dv = 2 \iiint_{\Omega_3} z dv$ . 又由于被积函数  $z$  关于  $y$  也是偶函数, 且  $\Omega_2$  与  $\Omega_3 \setminus \Omega_2$  关于  $xOz$  面对

①  $\Omega_1 \setminus \Omega_3 = \{(x, y, z) | (x, y, z) \in \Omega_1 \text{ 且 } (x, y, z) \notin \Omega_3\}$ , 称为  $\Omega_1$  与  $\Omega_3$  的差集.

称,故  $\iiint_{\Omega_3} z dv = 2 \iiint_{\Omega_2} z dv$ ①. 因此应选(C).

(2) 记  $D$  的三个顶点为  $A(a, a), B(-a, a), C(-a, -a)$  (图 10-61). 联结  $O, B$ , 则  $D$  为  $\triangle COB$  和  $\triangle BOA$  之并. 由于  $\triangle COB$  关于  $x$  轴对称,  $\triangle AOB$  关于  $y$  轴对称, 而函数  $xy$  关于  $y$  和  $x$  均是奇函数, 从而有

$$\iint_D xy dx dy = \iint_{\triangle AOB} xy dx dy + \iint_{\triangle COB} xy dx dy = 0 + 0 = 0;$$

又由于函数  $\cos x \sin y$  关于  $y$  是奇函数, 关于  $x$  是偶函数, 从而有

$$\begin{aligned} \iint_D \cos x \sin y dx dy &= \iint_{\triangle COB} \cos x \sin y dx dy + \iint_{\triangle AOB} \cos x \sin y dx dy \\ &= 0 + 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy, \end{aligned}$$

因此应选(A).

(3) 解法一 由于考虑  $F'(2)$ , 故可设  $t > 1$ . 对所给二重积分交换积分次序, 得

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_1^t f(x) dx \int_1^x dy \\ &= \int_1^t (x-1) f(x) dx, \end{aligned}$$

于是,

$$F'(t) = (t-1)f(t),$$

从而有

$$F'(2) = f(2). \quad \text{故选(B).}$$

解法二 设  $f(x)$  的一个原函数为  $G(x)$ , 则有

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx = \int_1^t [G(t) - G(y)] dy \\ &= G(t) \int_1^t dy - \int_1^t G(y) dy = (t-1)G(t) - \int_1^t G(y) dy. \end{aligned}$$

求导得

$$F'(t) = G(t) + (t-1)f(t) - G(t) = (t-1)f(t),$$

因此

$$F'(2) = f(2).$$

2. 计算下列二重积分:

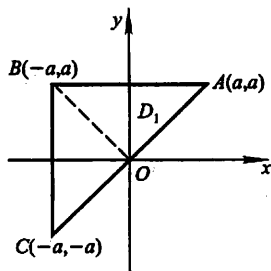


图 10-61

① 关于三重积分中如何利用对称性的问题, 请读者参阅本书习题 10-1 第 2 题题解的注(1)、(2), 得出有关结论.

(1)  $\iint_D (1+x)\sin y d\sigma$ , 其中  $D$  是顶点分别为  $(0,0), (1,0), (1,2)$  和  $(0,1)$  的梯形闭区域;

(2)  $\iint_D (x^2 - y^2) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\}$ ;

(3)  $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma$ , 其中  $D$  是圆周  $x^2 + y^2 = Rx$  所围成的闭区域;

(4)  $\iint_D (y^2 + 3x - 6y + 9) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ .

解 (1)  $D$  可表示为  $0 \leq y \leq 1+x, 0 \leq x \leq 1$ , 于是

$$\begin{aligned} \iint_D (1+x)\sin y d\sigma &= \int_0^1 dx \int_0^{1+x} (1+x)\sin y dy \\ &= \int_0^1 [(1+x) - (1+x)\cos(1+x)] dx \\ &\stackrel{t=1+x}{=} \int_1^2 (t - t\cos t) dt = \left[ \frac{t^2}{2} - t\sin t - \cos t \right]_1^2 \\ &= \frac{3}{2} + \sin 1 + \cos 1 - 2\sin 2 - \cos 2. \end{aligned}$$

(2) 由于

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 d\sigma &= \int_0^\pi x^2 dx \int_0^{\sin x} dy \\ &= \int_0^\pi x^2 \sin x dx = -[x^2 \cos x]_0^\pi + 2 \int_0^\pi x \cos x dx \\ &= \pi^2 + 2(x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx) = \pi^2 - 4; \\ \iint_D y^2 d\sigma &= \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} y^2 dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin^3 x dx = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx \textcircled{1} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 - y^2) d\sigma &= \iint_D x^2 d\sigma - \iint_D y^2 d\sigma = (\pi^2 - 4) - \frac{4}{9} \\ &= \pi^2 - \frac{40}{9}. \end{aligned}$$

(3) 利用极坐标计算. 在极坐标系中,

① 一般有:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ , 参阅本书习题 5-3 第 7(13) 题的解答.

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq R \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma &= \iint_D \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3} [(R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{R \cos \theta} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{3} (1 - |\sin^3 \theta|) d\theta \\ &= \frac{2}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta \\ &= \frac{2}{3} R^3 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{R^3}{3} \left( \pi - \frac{4}{3} \right). \end{aligned}$$

注 如果忽略  $\sin x$  在  $[-\frac{\pi}{2}, 0]$  上非正, 而按  $(R^2 - R^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} = R^3 \sin^3 \theta$  计算, 将导致错误. 这是一类常见错误, 要注意避免.

(4) 利用对称性可知  $\iint_D 3x d\sigma = 0, \iint_D 6y d\sigma = 0.$

又

$$\begin{aligned} \iint_D 9x d\sigma &= 9x(D \text{ 的面积}) = 9\pi R^2, \\ \iint_D y^2 d\sigma &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^2 \sin^2 \theta \cdot \rho d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \cdot \int_0^R \rho^3 d\rho \\ &= \pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{4} R^4, \end{aligned}$$

因此

$$\text{原式} = \frac{\pi}{4} R^4 + 9\pi R^2.$$

3. 交换下列二次积分的次序:

$$(1) \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x, y) dx;$$

$$(2) \int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

解 (1) 所给的二次积分等于闭区域  $D$  上的二重积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y} \leq x \leq \frac{1}{2}(y-4), 0 \leq y \leq 4\}$  (图 10-62), 将  $D$  表达为  $2x+4 \leq y \leq 4-x^2, -2 \leq x \leq 0$ , 则得

$$\int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x, y) dx = \int_{-2}^0 dx \int_{2x+4}^{4-x^2} f(x, y) dy.$$

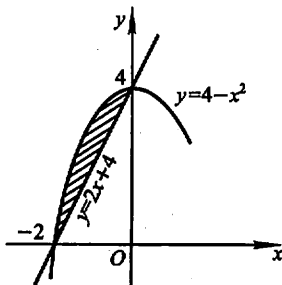


图 10-62

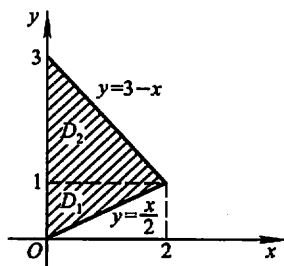


图 10-63

(2) 所给二次积分等于二重积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , 其中  $D = D_1 \cup D_2$ ,  $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3-y, 1 \leq y \leq 3\}$  (图 10-63).  $D$  可表达为  $\{(x, y) \mid \frac{x}{2} \leq y \leq 3-x, 0 \leq x \leq 2\}$ , 于是

$$\text{原式} = \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x, y) dy.$$

(3) 所给二次积分等于二重积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid \sqrt{x} \leq y \leq 1 + \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1\}$  (图 10-64). 将  $D$  表达为  $D_1 \cup D_2$ , 其中  $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}$ ;  $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2y-y^2}, 1 \leq y \leq 2\}$ , 于是

$$\text{原式} = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx.$$

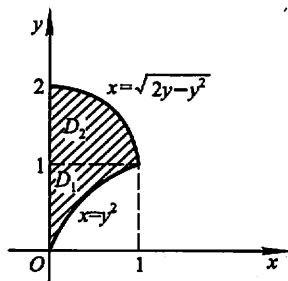


图 10-64

4. 证明:

$$\int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx.$$

证 上式左端的二次积分等于二重积分  $\iint_D e^{m(a-x)} f(x) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq a\} = \{(x, y) \mid x \leq y \leq a, 0 \leq x \leq a\}$ . 于是交换积分次序即得

$$\begin{aligned}\int_0^a dy \int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx &= \int_0^a dx \int_x^a e^{m(a-x)} f(x) dy \\ &= \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx.\end{aligned}$$

5. 把积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  表为极坐标形式的二次积分, 其中积分区域  $D = \{(x, y) | x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$ .

解 积分域  $D$  如图 10-65 所示. 抛物线  $y = x^2$  的极坐标方程为  $\rho = \sec \theta \tan \theta$ ; 直线  $y = 1$  的极坐标方程为  $\rho = \csc \theta$ . 用射线  $\theta = \frac{\pi}{4}$  和  $\theta = \frac{3\pi}{4}$  将  $D$  分成  $D_1, D_2, D_3$  三部分:

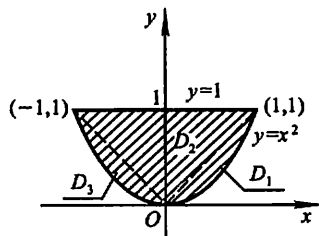


图 10-65

$$D_1: 0 \leq \rho \leq \sec \theta \tan \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4};$$

$$D_2: 0 \leq \rho \leq \csc \theta, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4};$$

$$D_3: 0 \leq \rho \leq \sec \theta \tan \theta, \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \pi.$$

因此

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta \tan \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \\ &\quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\csc \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho + \\ &\quad \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\theta \int_0^{\sec \theta \tan \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.\end{aligned}$$

6. 设  $f(x, y)$  在闭区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq y, x \geq 0\}$  上连续, 且

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{8}{\pi} \iint_D f(x, y) dx dy,$$

求  $f(x, y)$ .

解 设  $\iint_D f(x, y) dx dy = A$ , 则

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{8}{\pi} A,$$

从而

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy - \frac{8}{\pi} A \iint_D dx dy,$$

又



$$\iint_D dx dy = D \text{ 的面积} = \frac{\pi}{8},$$

故得

$$A = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy - A,$$

因此

$$A = \frac{1}{2} \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy.$$

在极坐标系中,

$$D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},$$

因此

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin \theta} \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}, \end{aligned}$$

于是得

$$A = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{9}.$$

从而

$$f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} + \frac{8}{9\pi} - \frac{2}{3}.$$

7. 把积分  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  化为三次积分, 其中积分区域  $\Omega$  是由曲面  $z = x^2 + y^2$ ,  $y = x^2$  及平面  $y = 1, z = 0$  所围成的闭区域.

解  $\Omega$  为一曲顶柱体, 其顶为  $z = x^2 + y^2$ , 底位于  $xOy$  面上, 其侧面由抛物柱面  $y = x^2$  及平面  $y = 1$  所组成. 由此可知  $\Omega$  在  $xOy$  面上的投影区域

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}.$$

因此

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

8. 计算下列三重积分:

(1)  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是两个球:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  和  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$  ( $R > 0$ ) 的公共部分;

(2)  $\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dv$ , 其中  $\Omega$  是由球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  所围成的闭区域;

(3)  $\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv$ , 其中  $\Omega$  是由  $xOy$  平面上曲线  $y^2 = 2x$  绕  $x$  轴旋转而成

的曲面与平面  $x = 5$  所围成的闭区域.

解 (1) 解法一 利用直角坐标, 采用“先重后单”的积分次序.

由  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz \end{cases}$  解得  $z = \frac{R}{2}$ , 于是用平面  $z = \frac{R}{2}$  把  $\Omega$  分成  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  两部分, 其中

$$\Omega_1 = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 2Rz - z^2, 0 \leq z \leq \frac{R}{2} \right\};$$

$$\Omega_2 = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2, \frac{R}{2} \leq z \leq R \right\} \text{ (图 10-66).}$$

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega_1} z^2 dx dy dz + \iiint_{\Omega_2} z^2 dx dy dz \\ &= \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2Rz-z^2} dx dy + \\ &\quad \int_{\frac{R}{2}}^R z^2 dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2-z^2} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{R}{2}} \pi(2Rz - z^2) \cdot z^2 dz + \\ &\quad \int_{\frac{R}{2}}^R \pi(R^2 - z^2) \cdot z^2 dz \\ &= \frac{1}{40} \pi R^5 + \frac{47}{480} \pi R^5 = \frac{59}{480} \pi R^5. \end{aligned}$$

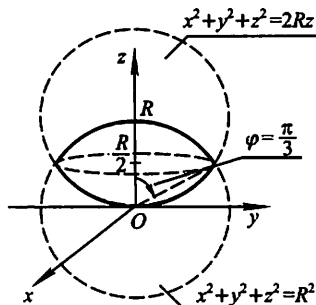


图 10-66

\* 解法二 利用球面坐标计算. 作圆锥面  $\varphi = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ , 将  $\Omega$  分成  $\Omega'_1$  和  $\Omega'_2$  两部分:

$$\Omega'_1 = \left\{ (r, \varphi, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\};$$

$$\Omega'_2 = \left\{ (r, \varphi, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2R \cos \varphi, \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}.$$

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega'_1} z^2 dx dy dz + \iiint_{\Omega'_2} z^2 dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr + \\ &\quad \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^4 dr \\ &= \frac{7}{60} \pi R^5 + \frac{1}{160} \pi R^5 = \frac{59}{480} \pi R^5. \end{aligned}$$

(2) 由于积分区域  $\Omega$  关于  $xOy$  面对称, 而被积函数关于  $z$  是奇函数, 故所求积分等于零.

(3) 积分区域  $\Omega$  由旋转抛物面  $y^2 + z^2 = 2x$  和平面  $x=5$  所围成,  $\Omega$  在  $yOz$  面上的投影区域

$$D_{yz} = \{(y, z) \mid y^2 + z^2 \leq 10\}.$$

因此  $\Omega$  可表示为

$$\frac{1}{2}(y^2 + z^2) \leq x \leq 5, \quad 0 \leq y^2 + z^2 \leq 10.$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv &= \iint_{D_{yz}} (y^2 + z^2) dydz \int_{\frac{y^2+z^2}{2}}^5 dx \\ &= \iint_{D_{yz}} (y^2 + z^2) \left(5 - \frac{y^2 + z^2}{2}\right) dydz \\ &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \iint_{D_{yz}} \rho^2 \left(5 - \frac{\rho^2}{2}\right) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{10}} \rho^3 \left(5 - \frac{\rho^2}{2}\right) d\rho \\ &= \frac{250}{3} \pi. \end{aligned}$$

注 根据本题的积分区域  $\Omega$  的特点, 应将  $\Omega$  向  $yOz$  面投影, 即采用先对  $x$ 、后对  $y$  和  $z$  的积分次序较宜.

\* 9. 设函数  $f(x)$  连续且恒大于零,

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2) dv}{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}, \\ G(t) &= \frac{\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma}{\int_{-t}^t f(x^2) dx}, \end{aligned}$$

其中  $\Omega(t) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$ ,  $D(t) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq t^2\}$ .

(1) 讨论  $F(t)$  在区间  $(0, +\infty)$  内的单调性;

(2) 证明当  $t > 0$  时,  $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$ .

解 (1) 利用球面坐标,

$$\iiint_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^t f(r^2) r^2 dr = 4\pi \int_0^t f(r^2) r^2 dr,$$

利用极坐标,

$$\begin{aligned}\iint_{D(t)} f(x^2 + y^2) d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(\rho^2) \rho d\rho = 2\pi \int_0^t f(\rho^2) \rho d\rho \\ &= 2\pi \int_0^t f(r^2) r dr.\end{aligned}$$

于是

$$F(t) = \frac{2 \int_0^t f(r^2) r^2 dr}{\int_0^t f(r^2) r dr},$$

求导得

$$F'(t) = \frac{2tf(t^2) \int_0^t f(r^2) r(t-r) dr}{\left[ \int_0^t f(r^2) r dr \right]^2},$$

所以在区间  $(0, +\infty)$  内,  $F'(t) > 0$ , 故  $F(t)$  在  $(0, +\infty)$  内单调增加.

(2) 证 因为  $f(x^2)$  为偶函数, 故

$$\int_{-t}^t f(x^2) dx = 2 \int_0^t f(x^2) dx = 2 \int_0^t f(r^2) dr.$$

所以

$$G(t) = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r^2) r dr}{2 \int_0^t f(r^2) dr} = \frac{\pi \int_0^t f(r^2) r dr}{\int_0^t f(r^2) dr}.$$

要证明  $t > 0$  时,  $F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$ , 即证

$$\frac{2 \int_0^t f(r^2) r^2 dr}{\int_0^t f(r^2) r dr} > \frac{2 \int_0^t f(r^2) r dr}{\int_0^t f(r^2) dr},$$

只需证当  $t > 0$  时,  $H(t) = \int_0^t f(r^2) r^2 dr \cdot \int_0^t f(r^2) dr - \left[ \int_0^t f(r^2) r dr \right]^2 > 0$ .

由于  $H(0) = 0$ , 且

$$H'(t) = f(t^2) \int_0^t f(r^2) (t-r)^2 dr > 0,$$

所以  $H(t)$  在  $(0, +\infty)$  内单调增加, 又  $H(t)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 故当  $t > 0$  时,

$$H(t) > H(0) = 0.$$

因此当  $t > 0$  时, 有

$$F(t) > \frac{2}{\pi} G(t).$$

10. 求平面  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  被三坐标面所割出的有限部分的面积.

解 平面方程为  $z = c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y$ , 它被三坐标面割出的有限部分在  $xOy$  面上的投影区域  $D_{xy}$  为由  $x$  轴、 $y$  轴和直线  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  所围成的三角形区域. 于是所求面积为

$$\begin{aligned} A &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} dx dy \\ &= \frac{1}{ab} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \iint_{D_{xy}} dx dy \\ &= \frac{1}{ab} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \cdot \frac{1}{2} ab \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}. \end{aligned}$$

11. 在均匀的半径为  $R$  的半圆形薄片的直径上, 要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片, 为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上, 问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少?

解 设矩形另一边的长度为  $l$  并建立如图 10-67 所示的坐标系, 则质心的纵标

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\iint_D y d\sigma}{A} = \frac{\int_{-R}^R dx \int_{-l}^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy}{A} \\ &= \frac{\int_{-R}^R (R^2 - x^2 - l^2) dx}{2A} = \frac{\frac{2}{3}R^3 - l^2 R}{A}, \end{aligned}$$

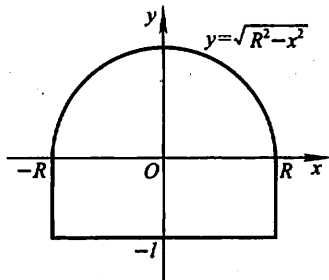


图 10-67

由题设  $\bar{y} = 0$  即可算得

$$l = \sqrt{\frac{2}{3}} R.$$

12. 求由抛物线  $y = x^2$  及直线  $y = 1$  所围成的均匀薄片 (面密度为常数  $\mu$ ) 对于直线  $y = -1$  的转动惯量.

解 闭区域  $D = \{(x, y) | -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 1\}$ , 所求的转动惯量为

$$I = \iint_D \mu (y+1)^2 d\sigma = \mu \int_0^1 (y+1)^2 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\mu \int_0^1 \sqrt{y}(y+1)^2 dy \\
 &= 2\mu \int_0^1 (y^{\frac{5}{2}} + 2y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) dy \\
 &= \frac{368}{105}\mu.
 \end{aligned}$$

13. 设在  $xOy$  面上有一质量为  $M$  的匀质半圆形薄片, 占有平面闭区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$ , 过圆心  $O$  垂直于薄片的直线上有一质量为  $m$  的质点  $P$ ,  $OP = a$ . 求半圆形薄片对质点  $P$  的引力.

解 求解本题时, 所有的分析和计算过程均与习题 10-4 的第 13 题雷同, 故这里略去详细的计算步骤.

积分区域  $D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ .

由于  $D$  关于  $y$  轴对称, 且质量均匀分布, 故  $F_x = 0$ . 又薄片的面密度  $\mu = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{2M}{\pi R^2}$ , 于是

$$\begin{aligned}
 F_y &= Gm\mu \iint_D \frac{y}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma \\
 &\stackrel{\text{极坐标}}{=} Gm\mu \int_0^\pi d\theta \int_0^R \frac{\rho \sin \theta}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \rho d\rho \\
 &= 2Gm\mu \int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho \\
 &= \frac{4GmM}{\pi R^2} \left[ \ln \frac{\sqrt{R^2 + a^2} + R}{a} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right]; \\
 F_z &= -Gm\mu \iint_D \frac{d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= -Gm\mu \int_0^\pi d\theta \int_0^R \frac{\rho}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho \\
 &= -\frac{2GmM}{R^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right) \\
 &= -\frac{2GmM}{R^2} \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right),
 \end{aligned}$$

所求引力为  $F = (0, F_y, F_z)$ .

14. 求质量分布均匀的半个旋转椭球体  $\Omega = \{(x, y, z) | \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, z \geq 0\}$  的质心.

解 设质心为  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , 由对称性知质心位于  $z$  轴上, 即  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ . 由于

$$\begin{aligned}\iint_D z dv &= \int_0^b z dz \iint_{D_z} dx dy \quad \left( \text{其中 } D_z = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \left( 1 - \frac{z^2}{b^2} \right) \right\} \right) \\ &= \int_0^b \pi a^2 \left( 1 - \frac{z^2}{b^2} \right) z dz \\ &= \pi a^2 \int_0^b \left( z - \frac{z^3}{b^2} \right) dz = \frac{\pi a^2 b^2}{4},\end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi a^2 b = \frac{2\pi a^2 b}{3},$$

因此 
$$\bar{z} = \frac{\frac{\pi a^2 b^2}{4}}{\frac{2\pi a^2 b}{3}} = \frac{3b}{8},$$

即质心为  $\left( 0, 0, \frac{3b}{8} \right)$ .

\* 15. 一球行星的半径为  $R$ , 其质量为  $M$ , 其密度呈球对称分布, 并向着球心线性增加. 若行星表面的密度为零, 那么行星中心的密度是多少?

解 设行星中心的密度为  $\mu_0$ , 则由题设, 在距球心  $r$  ( $0 \leq r \leq R$ ) 处的密度为  $\mu(r) = \mu_0 - kr$ . 由于  $\mu(R) = \mu_0 - kR = 0$ , 故  $k = \frac{\mu_0}{R}$ , 即

$$\mu(r) = \mu_0 \left( 1 - \frac{r}{R} \right).$$

于是,

$$\begin{aligned}M &= \iiint_{r \leq R} \mu_0 \left( 1 - \frac{r}{R} \right) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \mu_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^R \left( 1 - \frac{r}{R} \right) r^2 dr \\ &= 4\pi \mu_0 \int_0^R \left( 1 - \frac{r}{R} \right) r^2 dr = \frac{\mu_0 \pi R^3}{3},\end{aligned}$$

因此得

$$\mu_0 = \frac{3M}{\pi R^3}.$$

# 第十一章 曲线积分与曲面积分

## 习题 11-1

### 对弧长的曲线积分

1. 设在  $xOy$  面内有一分布着质量的曲线弧  $L$ , 在点  $(x, y)$  处它的线密度为  $\mu(x, y)$ . 用对弧长的曲线积分分别表达:

(1) 这曲线弧对  $x$  轴、对  $y$  轴的转动惯量  $I_x, I_y$ ;

(2) 这曲线弧的质心坐标  $\bar{x}, \bar{y}$ .

解 (1) 设想将  $L$  分成  $n$  个小弧段, 取出其中任意一段记作  $ds$  (其长度也记作  $ds$ ),  $(x, y)$  为  $ds$  上一点, 则  $ds$  对  $x$  轴和对  $y$  轴的转动惯量的近似值分别为

$$dI_x = y^2 \mu(x, y) ds; \quad dI_y = x^2 \mu(x, y) ds.$$

以此作为转动惯量元素并积分, 即得  $L$  对  $x$  轴、对  $y$  轴的转动惯量:

$$I_x = \int_L y^2 \mu(x, y) ds; \quad I_y = \int_L x^2 \mu(x, y) ds.$$

(2)  $ds$  对  $x$  轴和对  $y$  轴的静矩的近似值分别为

$$dM_x = y \mu(x, y) ds; \quad dM_y = x \mu(x, y) ds.$$

以此作为静矩元素并积分, 即得  $L$  对  $x$  轴、对  $y$  轴的静矩:

$$M_x = \int_L y \mu(x, y) ds; \quad M_y = \int_L x \mu(x, y) ds.$$

从而  $L$  的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_L x \mu(x, y) ds}{\int_L \mu(x, y) ds}; \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_L y \mu(x, y) ds}{\int_L \mu(x, y) ds}.$$

2. 利用对弧长的曲线积分的定义证明性质 3.

证 设对积分弧段  $L$  任意分割成  $n$  个小弧段, 第  $i$  个小弧段的长度为  $\Delta s_i$ ,  $(\xi_i, \eta_i)$  为第  $i$  个小弧段上任意取定的一点. 按假设, 有

$$f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i \leq g(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

令  $\lambda = \max\{\Delta s_i\} \rightarrow 0$ , 上式两端同时取极限, 即得



$$\int_L f(x, y) ds \leq \int_L g(x, y) ds.$$

又  $f(x, y) \leq |f(x, y)|$ ,  $-f(x, y) \leq |f(x, y)|$ , 利用以上结果, 得

$$\int_L f(x, y) ds \leq \int_L |f(x, y)| ds,$$

$$-\int_L f(x, y) ds \leq \int_L |f(x, y)| ds,$$

即

$$\left| \int_L f(x, y) ds \right| \leq \int_L |f(x, y)| ds.$$

3. 计算下列对弧长的曲线积分:

(1)  $\oint_L (x^2 + y^2)^n ds$ , 其中  $L$  为圆周  $x = a \cos t, y = a \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$ ;

(2)  $\int_L (x + y) ds$ , 其中  $L$  为连接  $(1, 0)$  及  $(0, 1)$  两点的直线段;

(3)  $\oint_L x ds$ , 其中  $L$  为由直线  $y = x$  及抛物线  $y = x^2$  所围成的区域的整个边界;

(4)  $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$ , 其中  $L$  为圆周  $x^2 + y^2 = a^2$ , 直线  $y = x$  及  $x$  轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界;

(5)  $\int_\Gamma \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} ds$ , 其中  $\Gamma$  为曲线  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$  上相应于  $t$  从 0 变到 2 的这段弧;

(6)  $\int_\Gamma x^2 yz ds$ , 其中  $\Gamma$  为折线  $ABCD$ , 这里  $A, B, C, D$  依次为点  $(0, 0, 0), (0, 0, 2), (1, 0, 2), (1, 3, 2)$ ;

(7)  $\int_L y^2 ds$ , 其中  $L$  为摆线的一拱  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$ ;

(8)  $\int_L (x^2 + y^2) ds$ , 其中  $L$  为曲线  $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$ .

解 (1)  $\oint_L (x^2 + y^2)^n ds$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t)^n \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} a^{2n+1} dt = 2\pi a^{2n+1}.$$

(2) 直线  $L$  的方程为  $y = 1 - x (0 \leq x \leq 1)$ .

$$\int_L (x + y) ds = \int_0^1 [x + (1 - x)] \sqrt{1 + (-1)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{2} dx = \sqrt{2}.$$

(3)  $L$  由  $L_1$  和  $L_2$  两段组成, 其中  $L_1: y=x(0 \leq x \leq 1); L_2: y=x^2(0 \leq x \leq 1)$ .  
于是

$$\begin{aligned}\oint_L x ds &= \int_{L_1} x ds + \int_{L_2} x ds = \int_0^1 x \sqrt{1+1^2} dx + \int_0^1 x \sqrt{1+(2x)^2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{2} x dx + \int_0^1 x \sqrt{1+4x^2} dx \\ &= \frac{1}{12} (5\sqrt{5} + 6\sqrt{2} - 1).\end{aligned}$$

(4)  $L$  由线段  $OA: y=0(0 \leq x \leq a)$ , 圆弧  $\widehat{AB}: x=a \cos t, y=a \sin t (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$  和线段  $OB: y=x (0 \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{2}})$  组成(图 11-1).

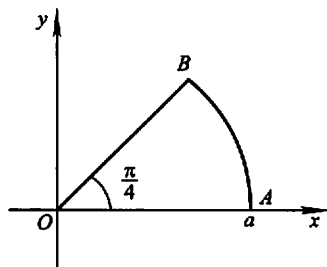


图 11-1

$$\begin{aligned}\int_{OA} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds &= \int_0^a e^x dx = e^a - 1; \\ \int_{\widehat{AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} a e^a dt = \frac{\pi}{4} a e^a; \\ \int_{OB} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds &= \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x} \sqrt{1+1^2} dx \\ &= e^a - 1,\end{aligned}$$

于是  $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = e^a - 1 + \frac{\pi}{4} a e^a + e^a - 1 = e^a \left( 2 + \frac{\pi a}{4} \right) - 2$ .

$$\begin{aligned}(5) \quad ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + (e^t)^2} dt \\ &= \sqrt{3} e^t dt, \\ \int_{\Gamma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} ds &= \int_0^2 \frac{1}{e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t + e^{2t}} \cdot \sqrt{3} e^t dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^2 e^{-t} dt = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - e^{-2}).\end{aligned}$$

(6)  $\Gamma$  由直线段  $AB$ 、 $BC$  和  $CD$  组成, 其中

$AB: x=0, y=0, z=t(0 \leq t \leq 2); BC: x=t, y=0, z=2(0 \leq t \leq 1);$

$CD: x=1, y=t, z=2(0 \leq t \leq 3).$

于是  $\int_{\Gamma} x^2 y z ds = \int_{AB} x^2 y z ds + \int_{BC} x^2 y z ds + \int_{CD} x^2 y z ds$

$$= \int_0^2 0 dt + \int_0^1 0 dt + \int_0^3 2t dt = 9.$$

$$\begin{aligned} (7) \quad ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \sqrt{2a} \sqrt{1 - \cos t} dt, \\ \int_L y^2 ds &= \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \cdot \sqrt{2a} \sqrt{1 - \cos t} dt \\ &= \sqrt{2} a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{\frac{5}{2}} dt = \sqrt{2} a^3 \int_0^{2\pi} \left(2 \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{\frac{5}{2}} dt \\ &\stackrel{u = \frac{t}{2}}{=} 16a^3 \int_0^{\pi} \sin^5 u du \\ &= 32a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 u du \textcircled{1} = 32a^3 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{256}{15} a^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (8) \quad ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \sqrt{(at \cos t)^2 + (at \sin t)^2} dt = at dt, \\ \int_L (x^2 + y^2) ds &= \int_0^{2\pi} [a^2(\cos t + t \sin t)^2 + a^2(\sin t - t \cos t)^2] \cdot at dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^3(1 + t^2) t dt = 2\pi^2 a^3(1 + 2\pi^2). \end{aligned}$$

4. 求半径为  $a$ 、中心角为  $2\varphi$  的均匀圆弧(线密度  $\mu=1$ )的质心.

解 取坐标系如图 11-2 所示,则由对称性知

$$\bar{y}=0.$$

又  $M = \int_L \mu ds = \int_L ds = 2\varphi a$  (也可由圆弧的弧长公式直接得出),

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \bar{x} &= \frac{\int_L x \mu ds}{M} = \frac{\int_{-\varphi}^{\varphi} a \cos t \cdot a dt}{2\varphi a} \\ &= \frac{2a^2 \sin \varphi}{2\varphi a} = \frac{a \sin \varphi}{\varphi}, \end{aligned}$$

所求圆弧的质心的位置为  $\left(\frac{a \sin \varphi}{\varphi}, 0\right)$ .

5. 设螺旋形弹簧一圈的方程为  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = kt$ , 其中  $0 \leq t \leq 2\pi$ , 它的线密度  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , 求:

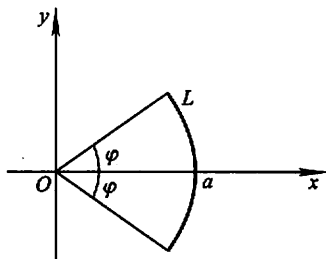


图 11-2

① 参阅上册第五章第 3 节例 12.

(1) 它关于  $z$  轴的转动惯量  $I_z$ ;

(2) 它的质心.

解 (1) 
$$\begin{aligned} I_z &= \int_L (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds = \int_L (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} a^2(a^2 + k^2 t^2) \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + k^2} dt \\ &= a^2 \sqrt{a^2 + k^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) dt \\ &= \frac{2}{3} \pi a^2 \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2). \end{aligned}$$

(2) 设质心位置为  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

$$\begin{aligned} M &= \int_L \rho(x, y, z) ds = \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \sqrt{a^2 + k^2} dt \\ &= \frac{2}{3} \pi \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2), \\ \bar{x} &= \frac{1}{M} \int_L x \rho(x, y, z) ds = \frac{1}{M} \int_L x (x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} a \cos t (a^2 + k^2 t^2) \cdot \sqrt{a^2 + k^2} dt \\ &= \frac{a \sqrt{a^2 + k^2}}{M} \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \cos t dt, \end{aligned}$$

由于 
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \cos t dt &= [(a^2 + k^2 t^2) \sin t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin t \cdot 2k^2 t dt \\ &= [2k^2 t \cos t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2k^2 \cos t dt = 4\pi k^2, \end{aligned}$$

因此 
$$\bar{x} = \frac{a \sqrt{a^2 + k^2} \cdot 4\pi k^2}{\frac{2}{3} \pi \sqrt{a^2 + k^2} (3a^2 + 4\pi^2 k^2)} = \frac{6ak^2}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}.$$

类似的, 
$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{M} \int_L y (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{a \sqrt{a^2 + k^2}}{M} \int_0^{2\pi} (a^2 + k^2 t^2) \sin t dt \\ &= \frac{a \sqrt{a^2 + k^2} \cdot (-4\pi^2 k^2)}{M} = \frac{-6\pi a k^2}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{M} \int_L z (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{k \sqrt{a^2 + k^2}}{M} \int_0^{2\pi} t (a^2 + k^2 t^2) dt \\ &= \frac{k \sqrt{a^2 + k^2} (2a^2 \pi^2 + 4k^2 \pi^4)}{M} = \frac{3\pi k (a^2 + 2\pi^2 k^2)}{3a^2 + 4\pi^2 k^2}. \end{aligned}$$

1. 设  $L$  为  $xOy$  面内直线  $x=a$  上的一段, 证明:

$$\int_L P(x, y) dx = 0.$$

证 将  $L$  的方程表达为如下的参数形式:

$$\begin{cases} x=a, \\ y=t, \end{cases} \quad t \text{ 从 } \alpha \text{ 变到 } \beta.$$

于是由第二类曲线积分的计算公式, 得

$$\int_L P(x, y) dx = \int_a^\beta P(a, t) \cdot 0 dt = 0.$$

注 本题给出了第二类曲线积分的一个重要性质:

如果  $L$  为垂直于  $x$  轴的有向线段, 则  $\int_L P(x, y) dx = 0$ ; 如果  $L$  为垂直于  $y$  轴的有向线段, 则  $\int_L Q(x, y) dy = 0$ . 这一性质常被用来简化第二类曲线积分的计算.

2. 设  $L$  为  $xOy$  面内  $x$  轴上从点  $(a, 0)$  到点  $(b, 0)$  的一段直线, 证明:

$$\int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(x, 0) dx.$$

证 将  $L$  的方程表达为如下的参数形式:

$$\begin{cases} x=x, \\ y=0, \end{cases} \quad x \text{ 从 } a \text{ 变到 } b,$$

于是

$$\int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(x, 0) dx.$$

3. 计算下列对坐标的曲线积分:

(1)  $\int_L (x^2 - y^2) dx$ , 其中  $L$  是抛物线  $y = x^2$  上从点  $(0, 0)$  到点  $(2, 4)$  的一段弧;

(2)  $\oint_L xy dx$ , 其中  $L$  为圆周  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 及  $x$  轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界(按逆时针方向绕行);

(3)  $\int_L y dx + x dy$ , 其中  $L$  为圆周  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$  上对应  $t$  从  $0$  到  $\frac{\pi}{2}$  的一段弧;

(4)  $\oint_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2}$ , 其中  $L$  为圆周  $x^2+y^2=a^2$  (按逆时针方向绕行);

(5)  $\int_\Gamma x^2 dx + z dy - y dz$ , 其中  $\Gamma$  为曲线  $x=k\theta, y=a\cos\theta, z=a\sin\theta$  上对应  $\theta$  从 0 到  $\pi$  的一段弧;

(6)  $\int_\Gamma x dx + y dy + (x+y-1) dz$ , 其中  $\Gamma$  是从点  $(1,1,1)$  到点  $(2,3,4)$  的一段直线;

(7)  $\oint_\Gamma dx - dy + y dz$ , 其中  $\Gamma$  为有向闭折线  $ABCA$ , 这里的  $A, B, C$  依次为点  $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ ;

(8)  $\int_L (x^2-2xy)dx + (y^2-2xy)dy$ , 其中  $L$  是抛物线  $y=x^2$  上从点  $(-1,1)$  到点  $(1,1)$  的一段弧.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad (1) \int_L (x^2 - y^2) dx &= \int_0^2 (x^2 - x^4) dx \\ &= -\frac{56}{15}.\end{aligned}$$

(2) 如图 11-3,  $L$  由  $L_1$  和  $L_2$  所组成, 其中  $L_1$  为有向半圆弧:

$$\begin{cases} x = a + a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases} \quad t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } \pi;$$

$L_2$  为有向线段  $y=0, x$  从 0 变到  $2a$ . 于是

$$\begin{aligned}\oint_L xy dx &= \int_{L_1} xy dx + \int_{L_2} xy dx \\ &= \int_0^\pi a(1 + \cos t) \cdot a \sin t \cdot (-a \sin t) dt + 0 \\ &= -a^3 \left( \int_0^\pi \sin^2 t dt + \int_0^\pi \sin^2 t \cos t dt \right) \\ &= -a^3 \left( \frac{\pi}{2} + 0 \right) = -\frac{\pi}{2} a^3.\end{aligned}$$

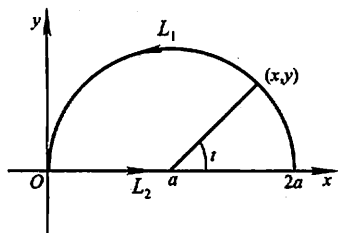


图 11-3

$$\begin{aligned}(3) \int_L y dx + x dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [R \sin t \cdot (-R \sin t) + R \cos t \cdot R \cos t] dt \\ &= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = 0.\end{aligned}$$

(4)  $L$  的参数方程为  $x=a\cos t, y=a\sin t, t$  从 0 变到  $2\pi$ . 于是

$$\text{原式} = \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} [a(\cos t + \sin t) \cdot (-a \sin t) - a(\cos t - \sin t) \cdot a \cos t] dt$$

$$= \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} (-a^2) dt = -2\pi.$$

$$\begin{aligned} (5) \int_{\Gamma} x^2 dx + z dy - y dz \\ &= \int_0^{\pi} [k^2 \theta^2 \cdot k + a \cos \theta \cdot (-a \sin \theta) - a \cos \theta \cdot (a \cos \theta)] d\theta \\ &= \int_0^{\pi} (k^3 \theta^2 - a^2) d\theta = \frac{1}{3} k^3 \pi^3 - a^2 \pi. \end{aligned}$$

(6) 直线  $\Gamma$  的参数方程为:  $x=1+t, y=1+2t, z=1+3t, t$  从 0 变到 1. 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^1 [(1+t) \cdot 1 + (1+2t) \cdot 2 + (1+t+1+2t-1) \cdot 3] dt \\ &= \int_0^1 (6+14t) dt = 13. \end{aligned}$$

(7)  $\Gamma$  由有向线段  $AB, BC, CA$  依次连接而成, 其中

$AB: x=1-t, y=t, z=0, t$  从 0 变到 1;

$BC: x=0, y=1-t, z=t, t$  从 0 变到 1;

$CA: x=t, y=0, z=1-t, t$  从 0 变到 1.

$$\int_{AB} dx - dy + y dz = \int_0^1 [(-1) - 1 + 0] dt = -2;$$

$$\int_{BC} dx - dy + y dz = \int_0^1 [0 - (-1) + (1-t) \cdot 1] dt = \int_0^1 (2-t) dt = \frac{3}{2};$$

$$\int_{CA} dx - dy + y dz = \int_0^1 (1-0+0) dt = 1,$$

因此  $\oint_{\Gamma} dx - dy + y dz = -2 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$

$$\begin{aligned} (8) \int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy \\ &= \int_{-1}^1 [(x^2 - 2x \cdot x^2) + (x^4 - 2x \cdot x^2) \cdot 2x] dx \\ &= \int_{-1}^1 (2x^5 - 4x^4 - 2x^3 + x^2) dx \\ &= 2 \int_0^1 (-4x^4 + x^2) dx = -\frac{14}{15}. \end{aligned}$$

4. 计算  $\int_L (x+y) dx + (y-x) dy$ , 其中  $L$  是:

- (1) 抛物线  $y^2=x$  上从点  $(1,1)$  到点  $(4,2)$  的一段弧;
- (2) 从点  $(1,1)$  到点  $(4,2)$  的直线段;
- (3) 先沿直线从点  $(1,1)$  到点  $(1,2)$ , 然后再沿直线到点  $(4,2)$  的折线;
- (4) 曲线  $x=2t^2+t+1, y=t^2+1$  上从点  $(1,1)$  到点  $(4,2)$  的一段弧.

解 (1) 化为对  $y$  的定积分.  $L: x=y^2, y$  从 1 变到 2,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_1^2 [(y^2 + y) \cdot 2y + (y - y^2) \cdot 1] dy \\ &= \int_1^2 (2y^3 + y^2 + y) dy = \frac{34}{3}.\end{aligned}$$

(2)  $L$  的方程为  $y-1 = \frac{2-1}{4-1}(x-1)$ , 即  $x=3y-2, y$  从 1 变到 2. 化为对  $y$  的定积分计算, 有

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_1^2 [(3y-2+y) \cdot 3 + (y-3y+2) \cdot 1] dy \\ &= \int_1^2 (10y-4) dy = 11.\end{aligned}$$

(3) 记  $L_1$  为从点(1,1)到点(1,2)的有向线段,  $L_2$  为从点(1,2)到点(4,2)的有向线段. 则  $L_1: x=1, y$  从 1 变到 2;  $L_2: y=2, x$  从 1 变到 4. 在  $L_1$  上,  $dx=0$ ; 在  $L_2$  上,  $dy=0$ . 于是

$$\begin{aligned}\int_{L_1} (x+y)dx + (y-x)dy &= \int_1^2 (y-1)dy = \frac{1}{2}; \\ \int_{L_2} (x+y)dx + (y-x)dy &= \int_1^4 (x+2)dx = \frac{27}{2},\end{aligned}$$

因此 原式  $= \frac{1}{2} + \frac{27}{2} = 14$ .

(4) 由  $\begin{cases} 2t^2+t+1=1, \\ t^2+1=1 \end{cases}$  可得  $t=0$ ; 由  $\begin{cases} 2t^2+t+1=4, \\ t^2+1=2 \end{cases}$  可得  $t=1$ . 因此

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^1 [(2t^2+t+1+t^2+1) \cdot (4t+1) + (t^2+1-2t^2-t-1) \cdot 2t] dt \\ &= \int_0^1 (10t^3+5t^2+9t+2) dt = \frac{32}{3}.\end{aligned}$$

5. 一力场由沿横轴正方向的常力  $F$  所构成. 试求当一质量为  $m$  的质点沿圆周  $x^2+y^2=R^2$  按逆时针方向移过位于第一象限的那一段弧时场力所作的功.

解 依题意,  $F=(|F|, 0), L: x=R\cos t, y=R\sin t, t$  从 0 变到  $\frac{\pi}{2}$ , 因此

$$\begin{aligned}W &= \int_L F \cdot dr = \int_L |F| dx + 0 dy \\ &= |F| \int_0^{\frac{\pi}{2}} -R \sin t dt = -|F|R.\end{aligned}$$

6. 设  $z$  轴与重力的方向一致, 求质量为  $m$  的质点从位置  $(x_1, y_1, z_1)$  沿直线移到  $(x_2, y_2, z_2)$  时重力所作的功.

解 重力  $F=(0, 0, mg)$ , 质点移动的直线路径  $L$  的方程为



$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t, \\ y=y_1+(y_2-y_1)t, \\ z=z_1+(z_2-z_1)t, \end{cases} \quad t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 1.$$

于是

$$\begin{aligned} W &= \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_L 0dx + 0dy + mgdz \\ &= \int_0^1 mg(z_2 - z_1)dt = mg(z_2 - z_1). \end{aligned}$$

7. 把对坐标的曲线积分  $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  化成对弧长的曲线积分, 其中  $L$  为:

- (1) 在  $xOy$  面内沿直线从点  $(0, 0)$  到点  $(1, 1)$ ;
- (2) 沿抛物线  $y=x^2$  从点  $(0, 0)$  到点  $(1, 1)$ ;
- (3) 沿上半圆周  $x^2+y^2=2x$  从点  $(0, 0)$  到点  $(1, 1)$ .

解 (1)  $L$  为从点  $(0, 0)$  到  $(1, 1)$  的有向线段, 其上任一点处的切向量的方向余弦满足  $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 于是

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_L [P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta] ds \\ &= \int_L \frac{P(x, y) + Q(x, y)}{\sqrt{2}} ds. \end{aligned}$$

(2)  $L$  由如下的参数方程给出:  $x=x, y=x^2, x$  从 0 变到 1, 故  $L$  的切向量的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}} = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}},$$

于是  $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_L \frac{P(x, y) + 2xQ(x, y)}{\sqrt{1+4x^2}} ds.$

(3)  $L$  由如下的参数方程给出:  $x=x, y=\sqrt{2x-x^2}, x$  从 0 变到 1, 故  $L$  的切向量的方向余弦为

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}} = \sqrt{2x-x^2}; \\ \cos \beta &= \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \cdot \sqrt{2x-x^2} = 1-x, \end{aligned}$$

于是

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_L [\sqrt{2x-x^2} P(x, y) + (1-x)Q(x, y)] ds.$$

8. 设  $\Gamma$  为曲线  $x=t, y=t^2, z=t^3$  上相应于  $t$  从 0 变到 1 的曲线弧. 把对坐

标的曲线积分  $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$  化成对弧长的曲线积分.

解  $\frac{dx}{dt}=1, \frac{dy}{dt}=2t=2x, \frac{dz}{dt}=3t^2=3y$ , 注意到参数  $t$  由小变到大, 因此  $\Gamma$  的切向量的方向余弦为:

$$\cos \alpha = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 9y^2}};$$

$$\cos \beta = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} = \frac{2x}{\sqrt{1 + 4x^2 + 9y^2}};$$

$$\cos \gamma = \frac{z'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} = \frac{3y}{\sqrt{1 + 4x^2 + 9y^2}}.$$

从而 
$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\Gamma} \frac{P + 2xQ + 3yR}{\sqrt{1 + 4x^2 + 9y^2}} ds.$$

### 习题 11-3

### 格林公式及其应用

1. 计算下列曲线积分, 并验证格林公式的正确性:

(1)  $\oint_L (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ , 其中  $L$  是由抛物线  $y=x^2$  和  $y^2=x$  所围成的区域的正向边界曲线;

(2)  $\oint_L (x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy$ , 其中  $L$  是四个顶点分别为  $(0,0)$ 、 $(2,0)$ 、 $(2,2)$  和  $(0,2)$  的正方形区域的正向边界.

解 (1) 先按曲线积分的计算公式直接计算. 记  $L_1: y=x^2, x$  从 0 变到 1;  $L_2: x=y^2, y$  从 1 变到 0 (图 11-4). 于是

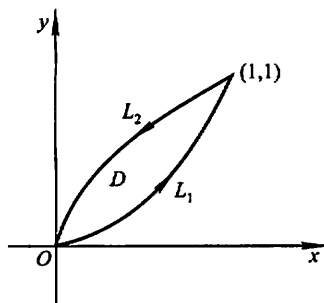


图 11-4

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{L_1} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy + \int_{L_2} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy \\ &= \int_0^1 [(2x^3 - x^2) + (x + x^4) \cdot 2x]dx + \int_1^0 [(2y^3 - y^4) \cdot 2y + (y^2 + y^2)]dy \\ &= \int_0^1 (2x^5 + 2x^3 + x^2)dx + \int_1^0 (-2y^5 + 4y^4 + 2y^2)dy \\ &= \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

又,  $P = 2xy - x^2, Q = x + y^2, \frac{\partial P}{\partial y} = 2x, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1,$

$$\begin{aligned}
 \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_D (1 - 2x) dx dy \\
 &= \int_0^1 (1 - 2x) dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2) dx \\
 &= \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} - x^2 + 2x^3) dx = \frac{1}{30}.
 \end{aligned}$$

可见  $\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$

(2) 如图 11-5.  $L$  由有向线段  $OA$ 、 $AB$ 、 $BC$  和  $CO$  组成.

$$\int_{OA} (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3};$$

$$\int_{AB} (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy = \int_0^2 (y^2 - 4y) dy = \frac{8}{3} - 8;$$

$$\int_{BC} (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy = \int_2^0 (x^2 - 8x) dx = 16 - \frac{8}{3};$$

$$\int_{CO} (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy = \int_2^0 y^2 dy = -\frac{8}{3},$$

于是 原式  $= \frac{8}{3} + \left( \frac{8}{3} - 8 \right) + \left( 16 - \frac{8}{3} \right) + \left( -\frac{8}{3} \right) = 8.$

又  $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y, \frac{\partial P}{\partial y} = -3xy^2,$

$$\begin{aligned}
 \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_D (-2y + 3xy^2) dx dy \\
 &= \int_0^2 dx \int_0^2 (-2y + 3xy^2) dy \\
 &= \int_0^2 (8x - 4) dx = 8,
 \end{aligned}$$

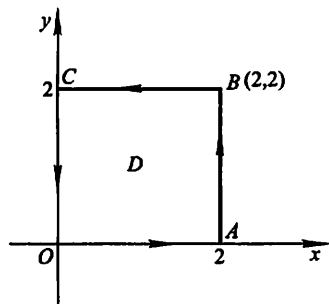


图 11-5

可见  $\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$

2. 利用曲线积分, 求下列曲线所围成的图形的面积:

(1) 星形线  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t;$

(2) 椭圆  $9x^2 + 16y^2 = 144;$

(3) 圆  $x^2 + y^2 = 2ax.$

解 (1) 正向星形线的参数方程中的参数  $t$  从 0 变到  $2\pi$ , 因此

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos^3 t (3a \sin^2 t \cos t) - a \sin^3 t (3a \cos^2 t) (-\sin t)] dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) dt \\
&= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt \\
&= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (1 - \cos 4t) dt = \frac{3}{8} \pi a^2.
\end{aligned}$$

(2) 正向椭圆  $9x^2 + 16y^2 = 144$  的参数方程为

$$x = 4\cos t, y = 3\sin t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 2\pi.$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [4\cos t \cdot 3\cos t - 3\sin t(-4\sin t)] dt \\
&= 6 \int_0^{2\pi} dt = 12\pi.
\end{aligned}$$

(3) 正向圆周  $x^2 + y^2 = 2ax$ , 即  $(x-a)^2 + y^2 = a^2$  的参数方程为

$$x = a + a\cos t, y = a\sin t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 2\pi.$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a + a\cos t)a\cos t - a\sin t(-a\sin t)] dt \\
&= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos t) dt = \pi a^2.
\end{aligned}$$

3. 计算曲线积分  $\oint_L \frac{ydx - xdy}{2(x^2 + y^2)}$ , 其中  $L$  为圆周  $(x-1)^2 + y^2 = 2$ ,  $L$  的方向为逆时针方向.

解 在  $L$  所围的区域内的点  $(0,0)$  处, 函数  $P(x,y), Q(x,y)$  均无意义. 现取  $r$  为适当小的正数, 使圆周  $l$  (取逆时针向):  $x = r\cos t, y = r\sin t$  ( $t$  从 0 变到  $2\pi$ ) 位于  $L$  所围的区域内, 则在由  $L$  和  $l$  所围成的复连通区域  $D$  上 (图 11-6), 可应用格林公式, 在  $D$  上,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{2(x^2 + y^2)} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

于是由格林公式得

$$\oint_L \frac{ydx - xdy}{2(x^2 + y^2)} + \oint_l \frac{ydx - xdy}{2(x^2 + y^2)} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

从而

$$\oint_L \frac{ydx - xdy}{2(x^2 + y^2)} = \oint_l \frac{ydx - xdy}{2(x^2 + y^2)}$$

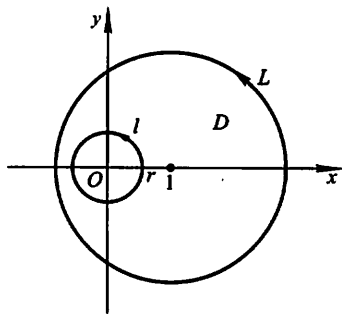


图 11-6

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-r^2 \sin^2 t - r^2 \cos^2 t}{2r^2} dt$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt = -\pi.$$

4. 证明下列曲线积分在整个  $xOy$  面内与路径无关, 并计算积分值:

$$(1) \int_{(1,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy;$$

$$(2) \int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy;$$

$$(3) \int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy.$$

解 (1) 函数  $P=x+y, Q=x-y$  在整个  $xOy$  面这个单连通区域内, 具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在  $xOy$  面内与路径无关. 取折线积分路径  $MN$ , 其中  $M$  为  $(1,1)$ ,  $R$  为  $(2,1)$ ,  $N$  为  $(2,3)$ , 则有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_1^2 (x+1)dx + \int_1^3 (2-y)dy \\ &= \frac{5}{2} + 0 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

(2) 函数  $P=6xy^2-y^3, Q=6x^2y-3xy^2$  在  $xOy$  面这个单连通域内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy - 3y^2 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在  $xOy$  面内与路径无关. 取折线积分路径  $MN$ , 其中  $M$  为  $(1,2)$ ,  $R$  为  $(3,2)$ ,  $N$  为  $(3,4)$ , 则有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_1^3 (24x-8)dx + \int_2^4 (54y-9y^2)dy \\ &= 80 + 156 = 236. \end{aligned}$$

(3) 函数  $P=2xy-y^4+3, Q=x^2-4xy^3$  在  $xOy$  面这个单连通域内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 4y^3 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在  $xOy$  面内与路径无关. 取折线积分路径  $MN$ , 其中  $M$  为  $(1,0)$ ,  $R$  为  $(2,0)$ ,  $N$  为  $(2,1)$ , 则

$$\text{原式} = \int_1^2 3dx + \int_0^1 (4-8y^3)dy$$

$$=3+2=5.$$

5. 利用格林公式, 计算下列曲线积分:

(1)  $\oint_L (2x-y+4)dx + (5y+3x-6)dy$ , 其中  $L$  为三顶点分别为  $(0,0)$ 、 $(3,0)$  和  $(3,2)$  的三角形正向边界;

(2)  $\oint_L (x^2 y \cos x + 2xy \sin x - y^2 e^x)dx + (x^2 \sin x - 2ye^x)dy$ , 其中  $L$  为正向星形线  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$ ;

(3)  $\int_L (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)dy$ , 其中  $L$  为在抛物线  $2x = \pi y^2$  上由点  $(0,0)$  到  $(\frac{\pi}{2}, 1)$  的一段弧;

(4)  $\int_L (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy$ , 其中  $L$  是在圆周  $y = \sqrt{2x - x^2}$  上由点  $(0,0)$  到点  $(1,1)$  的一段弧.

解 (1) 设  $D$  为  $L$  所围的三角形闭区域, 则由格林公式,

$$\begin{aligned} \oint_L (2x-y+4)dx + (5y+3x-6)dy &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D [3 - (-1)] dx dy = 4 \iint_D dx dy = 4 \times (D \text{ 的面积}) = 4 \times 3 = 12. \end{aligned}$$

(2) 由于  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \sin x + x^2 \cos x - 2ye^x$ ,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 \cos x + 2x \sin x - 2ye^x,$$

故由格林公式得

$$\text{原式} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 0 \cdot dx dy = 0.$$

(3) 由于  $P = 2xy^3 - y^2 \cos x$ ,  $Q = 1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2$  在  $xOy$  面内具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \cos x + 6xy^2 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给曲线积分与路径无关. 于是将原积分路径  $L$  改变为折线路径  $ORN$ , 其中

$O$  为  $(0,0)$ ,  $R$  为  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $N$  为  $(\frac{\pi}{2}, 1)$  (图 11-7), 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \cdot dx + \int_0^1 \left( 1 - 2y \sin \frac{\pi}{2} + 3 \cdot \frac{\pi^2}{4} y^2 \right) dy \\ &= \int_0^1 \left( 1 - 2y + \frac{3}{4} \pi^2 y^2 \right) dy = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

(4) 由于  $P=x^2-y, Q=-(x+\sin^2 y)$  在  $xOy$  面内具有一阶连续偏导数, 且  $\frac{\partial Q}{\partial x}=-1=\frac{\partial P}{\partial y}$ , 故所给曲线积分与路径无关. 于是将原积分路径  $L$  改为折线路径  $ORN$ , 其中  $O$  为  $(0,0), R$  为  $(1,0), N$  为  $(1,1)$  (图 11-8), 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 (1 + \sin^2 y) dy \\ &= \frac{1}{3} - 1 - \int_0^1 \frac{1 - \cos 2y}{2} dy \\ &= -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin 2 = -\frac{7}{6} + \frac{1}{4} \sin 2.\end{aligned}$$

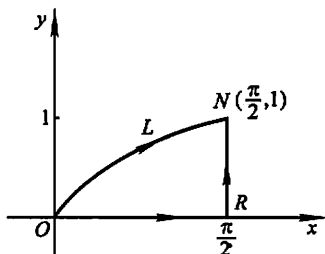


图 11-7

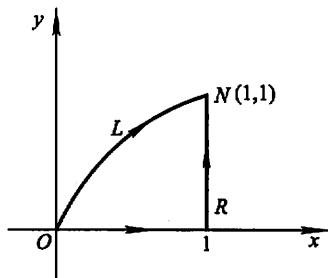


图 11-8

6. 验证下列  $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$  在整个  $xOy$  平面内是某一函数  $u(x,y)$  的全微分, 并求这样的  $u(x,y)$ :

- (1)  $(x+2y)dx + (2x+y)dy$ ;
- (2)  $2xydx + x^2dy$ ;
- (3)  $4\sin x \sin 3y \cos x dx - 3\cos 3y \cos 2x dy$ ;
- (4)  $(3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12y^2x)dy$ ;
- (5)  $(2x\cos y + y^2\cos x)dx + (2y\sin x - x^2\sin y)dy$ .

解 (1) 在整个  $xOy$  面内, 函数  $P=x+2y, Q=2x+y$  具有一阶连续偏导数, 且  $\frac{\partial Q}{\partial x}=2=\frac{\partial P}{\partial y}$ , 因此所给表达式是某一函数  $u(x,y)$  的全微分. 取  $(x_0, y_0)=(0,0)$ , 则有

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \int_0^x x dx + \int_0^y (2x+y) dy \\ &= \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2}.\end{aligned}$$

(2) 在整个  $xOy$  面内, 函数  $P=2xy$  和  $Q=x^2$  具有一阶连续偏导数, 且  $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x=\frac{\partial P}{\partial y}$ , 故所给表达式是某一函数  $u(x,y)$  的全微分. 取  $(x_0, y_0)=(0,0)$ , 则有

$$u(x, y) = \int_0^x 2x \cdot 0 dx + \int_0^y x^2 dy = x^2 y.$$

(3) 在整个  $xOy$  面内,  $P=4\sin x \sin 3y \cos x$  和  $Q=-3\cos 3y \cos 2x$  具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 6\cos 3y \sin 2x = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式是某一函数  $u(x, y)$  的全微分. 取  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , 则有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x 0 \cdot dx + \int_0^y (-3\cos 3y \cos 2x) dy \\ &= [-\sin 3y \cos 2x]_0^y \\ &= -\cos 2x \sin 3y. \end{aligned}$$

(4) 在整个  $xOy$  面内, 函数  $P=3x^2y+8xy^2$  和  $Q=x^3+8x^2y+12ye^y$  具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 16xy = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式为某一函数  $u(x, y)$  的全微分. 取  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , 则有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x 0 \cdot dx + \int_0^y (x^3 + 8x^2y + 12ye^y) dy \\ &= x^3y + 4x^2y^2 + 12(ye^y - e^y). \end{aligned}$$

(5) 方法一 在整个  $xOy$  面内,  $P=2x\cos y + y^2\cos x$  和  $Q=2y\sin x - x^2\sin y$  具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y\cos x - 2x\sin y = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式是某一函数  $u(x, y)$  的全微分. 取  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , 则有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x 2xdx + \int_0^y (2y\sin x - x^2\sin y) dy \\ &= y^2\sin x + x^2\cos y. \end{aligned}$$

注 在已经证明了所给表达式  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  是某一函数  $u(x, y)$  的全微分后, 为了求  $u(x, y)$ , 除了采用上面题解中的曲线积分方法外, 还可用以下两种方法:

方法二 (偏积分法) 因函数  $u(x, y)$  满足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) = 2x\cos y + y^2\cos x,$$

故

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int (2x\cos y + y^2\cos x) dx \\ &= x^2\cos y + y^2\sin x + \varphi(y), \end{aligned}$$

其中  $\varphi(y)$  是  $y$  的某个可导函数, 由此得



$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2 \sin y + 2y \sin x + \varphi'(y).$$

又  $u(x, y)$  必需满足

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) = 2y \sin x - x^2 \sin y,$$

从而得  $\varphi'(y) = 0, \varphi(y) = C$  ( $C$  为任意常数). 因此

$$u(x, y) = x^2 \cos y + y^2 \sin x + C,$$

取  $C=0$ , 就得到满足要求的一个  $u(x, y)$ .

**方法三** 利用微分运算法则直接凑出  $u(x, y)$ .

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (2x \cos y dx - x^2 \sin y dy) + (y^2 \cos x dx + 2y \sin x dy) \\ &= (\cos y dx^2 + x^2 d \cos y) + (y^2 d \sin x + \sin x dy^2) \\ &= d(x^2 \cdot \cos y) + d(y^2 \cdot \sin x) \\ &= d(x^2 \cos y + y^2 \sin x). \end{aligned}$$

因此可取  $u(x, y) = x^2 \cos y + y^2 \sin x$ .

7. 设有一变力在坐标轴上的投影为  $X = x^2 + y^2, Y = 2xy - 8$ , 这变力确定了一个力场. 证明质点在此场内移动时, 场力所作的功与路径无关.

**证** 场力所作的功

$$W = \int_L X dx + Y dy = \int_L (x^2 + y^2) dx + (2xy - 8) dy,$$

由于  $P = x^2 + y^2$  和  $Q = 2xy - 8$  在整个  $xOy$  面内具有一阶连续偏导数, 且  $\frac{\partial Q}{\partial x} =$

$2y = \frac{\partial P}{\partial y}$ , 故曲线积分在  $xOy$  面内与路径无关, 即场力所作的功与路径无关.

\* 8. 判别下列方程中哪些是全微分方程? 对于全微分方程, 求出它的通解.

(1)  $(3x^2 + 6xy)dx + (6x^2y + 4y^2)dy = 0;$

(2)  $(a^2 - 2xy - y^2)dx - (x + y)^2 dy = 0;$

(3)  $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0;$

(4)  $(x \cos y + \cos x)y' - y \sin x + \sin y = 0;$

(5)  $(x^2 - y)dx - x dy = 0;$

(6)  $y(x - 2y)dx - x^2 dy = 0;$

(7)  $(1 + e^{2\theta})d\rho + 2\rho e^{2\theta}d\theta = 0;$

(8)  $(x^2 + y^2)dx + xy dy = 0.$

**说明**

① 在单连通区域内, 若  $P(x, y), Q(x, y)$  有连续的偏导数, 则  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  是方程  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  为全微分方程的充要条件. 本题利用这一条件来

判别方程是否为全微分方程.

② 在条件  $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$  下, 存在函数  $u=u(x, y)$ , 满足  $du=P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ , 而  $u(x, y)=C$  即是方程  $P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0$  的通解. 函数  $u(x, y)$  可用三种方法求得, 其一为曲线积分法, 其二为凑微分法, 其三为偏积分法.

$$\text{解 (1)} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = (3x^2 + 6xy^2)'_y = 12xy;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (6x^2y + 4y^2)'_x = 12xy,$$

因  $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy \\ &= \int_0^x 3x^2 dx + \int_0^y (6x^2y + 4y^2)dy \\ &= x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3, \end{aligned}$$

故所求通解为 
$$x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3 = C.$$

$$(2) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = (a^2 - 2xy - y^2)'_y = -2x - 2y;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = [-(x+y)^2]'_x = -2(x+y),$$

因  $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy \\ &= \int_0^x a^2 dx - \int_0^y (x+y)^2 dy = a^2x - \frac{1}{3}(x+y)^3 + \frac{1}{3}x^3 \\ &= a^2x - x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3, \end{aligned}$$

故所求通解为

$$a^2x - x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 = C.$$

$$(3) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = (e^y)'_y = e^y; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = (xe^y - 2y)'_x = e^y, \quad \text{因 } \frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ 故原方程是全微分方程.}$$

下面用凑微分法求通解:

$$\begin{aligned} \text{方程的左端} &= e^y dx + (xe^y - 2y)dy \\ &= (e^y dx + xe^y dy) - 2ydy \end{aligned}$$

$$=d(xe^y) - d(y^2) = d(xe^y - y^2),$$

即原方程为

$$d(xe^y - y^2) = 0,$$

故所求通解为

$$xe^y - y^2 = C.$$

(4) 将原方程改写成

$$(\sin y - y \sin x)dx + (x \cos y + \cos x)dy = 0.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\sin y - y \sin x)'_y = \cos y - \sin x,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (x \cos y + \cos x)'_x = \cos y - \sin x,$$

因  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned} \text{方程的左端} &= (\sin y - y \sin x)dx + (x \cos y + \cos x)dy \\ &= (\sin y dx + x \cos y dy) + (-y \sin x dx + \cos x dy) \\ &= d(x \sin y) + d(y \cos x), \end{aligned}$$

即原方程为

$$d(x \sin y + y \cos x) = 0,$$

故所求通解为

$$x \sin y + y \cos x = C.$$

(5)  $\frac{\partial P}{\partial y} = (x^2 - y)'_y = -1$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = (-x)'_x = -1$ , 因  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned} \text{方程的左端} &= (x^2 - y)dx - xdy \\ &= x^2 dx - (y dx + x dy) = d\left(\frac{x^3}{3}\right) - d(xy), \end{aligned}$$

即原方程为

$$d\left(\frac{x^3}{3} - xy\right) = 0,$$

故所求通解为

$$\frac{x^3}{3} - xy = C.$$

(6)  $\frac{\partial P}{\partial y} = [y(x - 2y)]'_y = x - 4y$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = (-x^2)'_x = -2x$ . 因  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 故原方程不是全微分方程.

(7)  $\frac{\partial P}{\partial \theta} = (1 + e^{2\theta})'_\theta = 2e^{2\theta}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial \rho} = (2\rho e^{2\theta})'_\rho = 2e^{2\theta}$ , 因  $\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial Q}{\partial \rho}$ , 故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned} \text{方程的左端} &= (1 + e^{2\theta})d\rho + 2\rho e^{2\theta}d\theta \\ &= d\rho + (e^{2\theta}d\rho + 2\rho e^{2\theta}d\theta) = d\rho + d(\rho e^{2\theta}), \end{aligned}$$

即原方程为  
故所求通解为

$$d(\rho + \rho e^{2\theta}) = 0,$$

$$\rho + \rho e^{2\theta} = C.$$

(8)  $\frac{\partial P}{\partial y} = (x^2 + y^2)'_y = 2y$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = (xy)'_x = y$ . 因  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 故原方程不是全微分方程.

9. 确定常数  $\lambda$ , 使在右半平面  $x > 0$  内的向量  $\mathbf{A}(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{i} - x^2(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{j}$  为某二元函数  $u(x, y)$  的梯度, 并求  $u(x, y)$ .

解 在单连通域  $G$  内, 若  $P(x, y), Q(x, y)$  具有一阶连续偏导数, 则向量  $\mathbf{A}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$  为某二元函数  $u(x, y)$  的梯度 (此条件相当于  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  是  $u(x, y)$  的全微分) 的充分必要条件是  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  在  $G$  内恒成立.

本题中,  $P(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda$ ,  $Q(x, y) = -x^2(x^4 + y^2)^\lambda$ .

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x(x^4 + y^2)^\lambda + 2\lambda xy(x^4 + y^2)^{\lambda-1} \cdot 2y;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x(x^4 + y^2)^\lambda - x^2\lambda(x^4 + y^2)^{\lambda-1} \cdot 4x^3.$$

由等式  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  得到  $4x(x^4 + y^2)^\lambda(1 + \lambda) = 0$ ,

由于  $4x(x^4 + y^2)^\lambda > 0$ , 故  $\lambda = -1$ , 即  $\mathbf{A}(x, y) = \frac{2xy\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}}{x^4 + y^2}$ .

在半平面  $x > 0$  内, 取  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ , 则得

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_1^x \frac{2x \cdot 0}{x^4 + 0^2} dx - \int_0^y \frac{x^2}{x^4 + y^2} dy \\ &= -\arctan \frac{y}{x^2}. \end{aligned}$$

## 习题 11-4

## 对面积的曲面积分

1. 设有一分布着质量的曲面  $\Sigma$ , 在点  $(x, y, z)$  处它的面密度为  $\mu(x, y, z)$ , 用对面积的曲面积分表示这曲面对  $x$  轴的转动惯量.

解 设想将  $\Sigma$  分成  $n$  小块, 取出其中任意一块记作  $dS$  (其面积也记作  $dS$ ),  $(x, y, z)$  为  $dS$  上一点, 则  $dS$  对  $x$  轴的转动惯量近似等于

$$dI_x = (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dS.$$

以此作为转动惯量元素并积分, 即得  $\Sigma$  对  $x$  轴的转动惯量为

$$I_x = \iint_{\Sigma} (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)dS.$$

## 2. 按对面积的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS,$$

其中  $\Sigma$  是由  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  组成的.

证 由于  $f(x, y, z)$  在曲面  $\Sigma$  上可积, 故不论把  $\Sigma$  如何分割, 积分和的极限总是不变的. 因此在分割  $\Sigma$  时, 可以使  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  的公共边界曲线永远作为一条分割线. 这样,  $f(x, y, z)$  在  $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$  上的积分和等于  $\Sigma_1$  上的积分和加上  $\Sigma_2$  上的积分和, 记为

$$\sum_{(\Sigma_1 + \Sigma_2)} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i = \sum_{(\Sigma_1)} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i + \sum_{(\Sigma_2)} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

令  $\lambda = \max\{\Delta S_i \text{ 的直径}\} \rightarrow 0$ , 上式两端同时取极限, 即得

$$\iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS.$$

3. 当  $\Sigma$  是  $xOy$  面内的一个闭区域时, 曲面积分  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$  与二重积分有什么关系?

解 当  $\Sigma$  为  $xOy$  面内的一个闭区域时,  $\Sigma$  的方程为  $z=0$ , 因此在  $\Sigma$  上取值的  $f(x, y, z)$  恒为  $f(x, y, 0)$ , 且  $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = dx dy$ . 又  $\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域即为  $\Sigma$  自身, 因此有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma} f(x, y, 0) dx dy.$$

4. 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ , 其中  $\Sigma$  为抛物面  $z = 2 - (x^2 + y^2)$  在  $xOy$  面上方的部分,  $f(x, y, z)$  分别如下:

(1)  $f(x, y, z) = 1$ ;

(2)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ ;

(3)  $f(x, y, z) = 3z$ .

解 抛物面  $\Sigma$  与  $xOy$  面的交线为  $x^2 + y^2 = 2$ , 故  $\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域  $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$ . 又

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

于是,

$$(1) \iint_{\Sigma} 1 \cdot dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{极坐标}} \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{12} (1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6} \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \iint_{\Sigma} (x^2+y^2) dS &= \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2) \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy \\ &\xrightarrow{\text{极坐标}} \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1+4\rho^2} d\rho \\ &\xrightarrow{\rho = \frac{1}{2} \tan t} 2\pi \cdot \frac{1}{16} \int_0^{\arctan 2/\sqrt{2}} \sec^3 t \cdot \tan^3 t dt \\ &= \frac{\pi}{8} \int_0^{\arctan 2/\sqrt{2}} \sec^2 t (\sec^2 t - 1) d\sec t = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{596}{15} = \frac{149}{30} \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \iint_{\Sigma} 3z dS &= 3 \iint_{D_{xy}} [2 - (x^2+y^2)] \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy \\ &\xrightarrow{\text{极坐标}} 3 \iint_{D_{xy}} (2-\rho^2) \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2-\rho^2) \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho \\ &\xrightarrow{\rho = \frac{1}{2} \tan t} 6\pi \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\arctan 2/\sqrt{2}} \sec^3 t \cdot \tan t dt - \frac{1}{16} \int_0^{\arctan 2/\sqrt{2}} \sec^3 t \cdot \tan^3 t dt \right] \\ &= 6\pi \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\arctan 2/\sqrt{2}} \sec^2 t d\sec t - \frac{1}{16} \int_0^{\arctan 2/\sqrt{2}} \sec^2 t (\sec^2 t - 1) d\sec t \right] \\ &= 6\pi \left( \frac{13}{3} - \frac{149}{60} \right) = \frac{111}{10} \pi. \end{aligned}$$

5. 计算  $\iint_{\Sigma} (x^2+y^2) dS$ , 其中  $\Sigma$  是:

(1) 锥面  $z=\sqrt{x^2+y^2}$  及平面  $z=1$  所围成的区域的整个边界曲面;

(2) 锥面  $z^2=3(x^2+y^2)$  被平面  $z=0$  和  $z=3$  所截得的部分.

解 (1)  $\Sigma$  由  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  组成, 其中  $\Sigma_1$  为平面  $z=1$  上被圆周  $x^2+y^2=1$  所围的部分;  $\Sigma_2$  为锥面  $z=\sqrt{x^2+y^2}$  ( $0 \leq z \leq 1$ ).

在  $\Sigma_1$  上,  $dS = dx dy$ ;

在  $\Sigma_2$  上,  $dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy$ .

$\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  在  $xOy$  面上的投影区域  $D_{xy}$  均为  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

$$\begin{aligned} \text{因此 } \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2) dS + \iint_{\Sigma_2} (x^2 + y^2) dS \\ &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy + \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{2} dx dy \\ &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho + \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \pi = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \pi. \end{aligned}$$

(2) 由题设,  $\Sigma$  的方程为  $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ ,

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \sqrt{1 + \frac{9x^2}{3(x^2 + y^2)} + \frac{9y^2}{3(x^2 + y^2)}} dx dy = 2 dx dy. \end{aligned}$$

又由  $z^2 = 3(x^2 + y^2)$  和  $z = 3$  消去  $z$  得  $x^2 + y^2 = 3$ , 故  $\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域  $D_{xy}$  为  $x^2 + y^2 \leq 3$ . 于是

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \cdot 2 dx dy \stackrel{\text{极坐标}}{=} 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho^2 \cdot \rho d\rho = 9\pi.$$

6. 计算下列对面积的曲面积分:

(1)  $\iint_{\Sigma} \left( z + 2x + \frac{4}{3}y \right) dS$ , 其中  $\Sigma$  为平面  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$  在第一卦限中的部分;

(2)  $\iint_{\Sigma} (2xy - 2x^2 - x + z) dS$ , 其中  $\Sigma$  为平面  $2x + 2y + z = 6$  在第一卦限中的部分;

(3)  $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$ , 其中  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  上  $z \geq h$  ( $0 < h < a$ ) 的部分;

(4)  $\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS$ , 其中  $\Sigma$  为锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $x^2 + y^2 = 2ax$  所截得的有限部分.

解 (1) 在  $\Sigma$  上,  $z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y$ .  $\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域  $D_{xy}$  为由  $x$  轴、 $y$  轴和直线  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$  所围成的三角形闭区域. 因此

$$\iint_{\Sigma} \left( z + 2x + \frac{4}{3}y \right) dS$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{D_{xy}} \left[ \left( 4 - 2x - \frac{4}{3}y \right) + 2x + \frac{4}{3}y \right] \sqrt{1 + (-2)^2 + \left( -\frac{4}{3} \right)^2} dx dy \\
&= \iint_{D_{xy}} 4 \cdot \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy = \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot (D_{xy} \text{ 的面积}) \\
&= \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \right) = 4\sqrt{61}.
\end{aligned}$$

(2) 在  $\Sigma$  上,  $z = 6 - 2x - 2y$ .  $\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域为由  $x$  轴、 $y$  轴和直线  $x + y = 3$  所围成的三角形闭区域. 因此

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} (2xy - 2x^2 - x + z) dS \\
&= \iint_{D_{xy}} [2xy - 2x^2 - x + (6 - 2x - 2y)] \sqrt{1 + (-2)^2 + (-2)^2} dx dy \\
&= 3 \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (6 - 3x - 2x^2 + 2xy - 2y) dy \\
&= 3 \int_0^3 [(6 - 3x - 2x^2)(3 - x) + x(3 - x)^2 - (3 - x)^2] dx \\
&= 3 \int_0^3 (3x^3 - 10x^2 + 9) dx = -\frac{27}{4}.
\end{aligned}$$

(3) 在  $\Sigma$  上,  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ .  $\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域  $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2 - h^2\}$ .

由于积分曲面  $\Sigma$  关于  $yOz$  面和  $xOz$  面均对称, 故有

$$\iint_{\Sigma} x dS = 0, \iint_{\Sigma} y dS = 0.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = \iint_{\Sigma} z dS \\
&= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
&= a \iint_{D_{xy}} dx dy = a\pi(a^2 - h^2).
\end{aligned}$$

(4)  $\Sigma$  如图 11-9 所示,  $\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域  $D_{xy}$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 2ax$ . 由于  $\Sigma$  关于  $xOz$  面对称, 而函数  $xy$  和  $yz$  关于  $y$  均为奇函数, 故

$$\iint_{\Sigma} xy dS = 0, \iint_{\Sigma} yz dS = 0.$$

于是



$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS &= \iint_{\Sigma} zx dS \\
&= \iint_{D_{xy}} x \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} dx dy \\
&= \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\
&\stackrel{\text{极坐标}}{=} \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho \cos \theta \cdot \rho \cdot \rho d\rho \\
&= 8\sqrt{2} a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \\
&= 8\sqrt{2} a^4 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{64}{15} \sqrt{2} a^4.
\end{aligned}$$

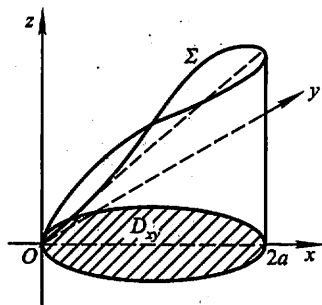


图 11-9

7. 求抛物面壳  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  ( $0 \leq z \leq 1$ ) 的质量, 此壳的面密度为  $\mu = z$ .

解  $\Sigma: z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  ( $0 \leq z \leq 1$ ) 在  $xOy$  面上的投影区域  $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$ .  $z_x = x, z_y = y$ . 故  $dS = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy$ . 因此

$$\begin{aligned}
M &= \iint_{\Sigma} z dS = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy \\
&\stackrel{\text{极坐标}}{=} \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sqrt{1 + \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1 + \rho^2} d\rho \\
&\stackrel{t = \rho^2}{=} \frac{\pi}{2} \int_0^2 t \sqrt{1 + t} dt \\
&\stackrel{\text{分部法}}{=} \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2}{3} t(1 + t)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 - \frac{2}{3} \int_0^2 (1 + t)^{\frac{3}{2}} dt \right] \\
&= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{4}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} (3^{\frac{5}{2}} - 1) \right] = \frac{2\pi}{15} (6\sqrt{3} + 1).
\end{aligned}$$

8. 求面密度为  $\mu_0$  的均匀半球壳  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $z \geq 0$ ) 对于  $z$  轴的转动惯量.

$$\begin{aligned}
\text{解 } I_z &= \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \mu_0 dS \\
&= \mu_0 \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_0 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (x^2+y^2) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dx dy \\
&\stackrel{\text{极坐标}}{=} \mu_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{a\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}} \cdot \rho d\rho \\
&\stackrel{\rho = a \sin t}{=} 2\pi a \mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3 \sin^3 t}{a \cos t} \cdot a \cos t dt \\
&= 2\pi a^4 \mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = 2\pi a^4 \mu_0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \pi a^4 \mu_0.
\end{aligned}$$

## 习题 11-5

## 对坐标的曲面积分

### 1. 按对坐标的曲面积分的定义证明公式

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} [P_1(x, y, z) \pm P_2(x, y, z)] dy dz \\
&= \iint_{\Sigma} P_1(x, y, z) dy dz \pm \iint_{\Sigma} P_2(x, y, z) dy dz.
\end{aligned}$$

证 把  $\Sigma$  任意分成  $n$  块小曲面  $\Delta S_i$  (其面积也记为  $\Delta S_i$ ),  $\Delta S_i$  在  $yOz$  面上的投影为  $(\Delta S_i)_{yz}$ , 在  $\Delta S_i$  上任意取定一点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ . 设  $\lambda$  是各小块曲面的直径的最大值, 则

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} [P_1(x, y, z) \pm P_2(x, y, z)] dy dz \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \pm P_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)] (\Delta S_i)_{yz} \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} \\
&= \iint_{\Sigma} P_1(x, y, z) dy dz \pm \iint_{\Sigma} P_2(x, y, z) dy dz.
\end{aligned}$$

2. 当  $\Sigma$  为  $xOy$  面内的一个闭区域时, 曲面积分  $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$  与二重积分有什么关系?

解 此时  $\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域  $D_{xy}$  就是  $\Sigma$  自身 (但不定侧), 且在  $\Sigma$  上,  $z = 0$ , 因此

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, 0) dx dy,$$

当  $\Sigma$  取上侧时为正号, 取下侧时为负号.

3. 计算下列对坐标的曲面积分:

(1)  $\iint_{\Sigma} x^2 y^2 z dx dy$ , 其中  $\Sigma$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  的下半部分的下侧;

(2)  $\iint_{\Sigma} z dx dy + x dy dz + y dz dx$ , 其中  $\Sigma$  是柱面  $x^2 + y^2 = 1$  被平面  $z = 0$  及  $z = 3$  所截得的在第一卦限内的部分的前侧;

(3)  $\iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dy dz + [2f(x, y, z) + y] dz dx + [f(x, y, z) + z] dx dy$ , 其中  $f(x, y, z)$  为连续函数,  $\Sigma$  是平面  $x - y + z = 1$  在第四卦限部分的上侧;

(4)  $\oint_{\Sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dz dx$ , 其中  $\Sigma$  是平面  $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$  所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解 (1)  $\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域  $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$ , 在  $\Sigma$  上,  $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ . 因  $\Sigma$  取下侧, 故

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} x^2 y^2 z dx dy &= - \iint_{D_{xy}} x^2 y^2 (-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) dx dy \\ &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \iint_{D_{xy}} \rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2 2\theta d\theta \cdot \int_0^R \rho^5 \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho \\ &\stackrel{\rho = R \sin t}{=} \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^5 \sin^5 t \cdot R \cos t \cdot R \cos t dt \\ &= \frac{\pi}{4} R^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 t - \sin^7 t) dt \\ &= \frac{\pi}{4} R^7 \cdot \left( \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{105} \pi R^7. \end{aligned}$$

(2) 由于柱面  $x^2 + y^2 = 1$  在  $xOy$  面上的投影为零, 因此  $\iint_{\Sigma} z dx dy = 0$ . 又,  $D_{yz} = \{(y, z) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}$ ,  $D_{xz} = \{(x, z) | 0 \leq z \leq 3, 0 \leq x \leq 1\}$  (图11-10), 因  $\Sigma$  取前侧, 所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{\Sigma} x dy dz + \iint_{\Sigma} y dz dx \\ &= \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 - y^2} dy dz + \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 - x^2} dz dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^3 dz \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy + \int_0^3 dz \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \\
 &= 2 \cdot 3 \left[ \frac{y}{2} \sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2} \arcsin y \right]_0^1 \\
 &= \frac{3}{2} \pi.
 \end{aligned}$$

(3) 在  $\Sigma$  上,  $z=1-x+y$ . 由于  $\Sigma$  取上侧, 故  $\Sigma$  在任一点处的单位法向量为

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1).$$

由两类曲面积分之间的联系, 可得

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{\Sigma} [(f+x)\cos\alpha + (2f+y)\cos\beta + (f+z)\cos\gamma] dS \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} [(f+x) - (2f+y) + (f+z)] dS \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x-y+z) dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\Sigma \text{ 的面积}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

(4) 在坐标面  $x=0$ 、 $y=0$  和  $z=0$  上, 积分值均为零, 因此只需计算在  $\Sigma'$ :  $x+y+z=1$  (取上侧) 上的积分值 (图 11-11). 下面用两种方法计算.

$$\begin{aligned}
 \text{方法一} \quad \iint_{\Sigma} xz dx dy &= \iint_{D_{xy}} x(1-x-y) dx dy \\
 &= \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy = \frac{1}{24},
 \end{aligned}$$

由被积函数和积分曲面关于积分变量的对称性, 可得

$$\iint_{\Sigma} xy dy dz = \iint_{\Sigma} yz dz dx = \iint_{\Sigma} xz dx dy = \frac{1}{24},$$

因此 
$$\oint_{\Sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dz dx = 3 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

**方法二** 利用两类曲面积分的联系, 将  $\iint_{\Sigma} xy dy dz$  和  $\iint_{\Sigma} yz dz dx$  均化为关于坐标  $x$  和  $y$  的曲面积分计算.

由于  $\Sigma'$ :  $x+y+z=1$  取上侧, 故  $\Sigma'$  在任一点处的单位法向量

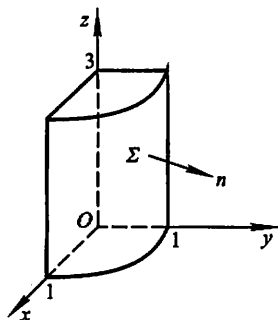


图 11-10

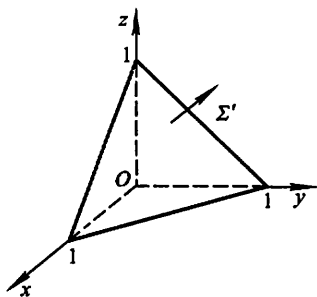


图 11-11

$$n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\begin{aligned}\text{于是} \quad \iint_{\Sigma} xy dy dz &= \iint_{\Sigma} xy \cos \alpha dS = \iint_{\Sigma} xy \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dx dy = \iint_{\Sigma} xy dx dy, \\ \iint_{\Sigma} yz dz dx &= \iint_{\Sigma} yz \cos \beta dS = \iint_{\Sigma} yz \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} dx dy = \iint_{\Sigma} yz dx dy.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{因此} \quad & \iint_{\Sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dz dx \\ &= \iint_{\Sigma} (xz + xy + yz) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} [x(1-x-y) + xy + y(1-x-y)] dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (-x^2 - y^2 - xy + x + y) dy = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

于是原式 =  $\frac{1}{8}$ .

注 计算本题最方便的方法是利用下节的高斯公式:

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dz dx &= \iiint_{\Omega} (y + z + x) dv \\ &\stackrel{\text{对称性}}{=} 3 \iiint_{\Omega} z dv = 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz \\ &= 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2} dy \\ &= 3 \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} dx = 3 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

#### 4. 把对坐标的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

化成对面积的曲面积分, 其中:

- (1)  $\Sigma$  是平面  $3x + 2y + 2\sqrt{3}z = 6$  在第一卦限的部分的上侧;
- (2)  $\Sigma$  是抛物面  $z = 8 - (x^2 + y^2)$  在  $xOy$  面上方的部分的上侧.

解 (1) 由于  $\Sigma: 3x + 2y + 2\sqrt{3}z = 6$  取上侧, 故  $\Sigma$  在任一点处的单位法向量为

$$\begin{aligned}n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) &= \frac{1}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (2\sqrt{3})^2}} (3, 2, 2\sqrt{3}) \\ &= \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2\sqrt{3}}{5}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{于是 } \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy &= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma} \left( \frac{3}{5}P + \frac{2}{5}Q + \frac{2\sqrt{3}}{5}R \right) dS.\end{aligned}$$

(2) 由于  $\Sigma: z = 8 - (x^2 + y^2)$  取上侧, 故  $\Sigma$  在其上任一点  $(x, y, z)$  处的单位法向量为

$$\begin{aligned}n &= \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}}(2x, 2y, 1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{于是 } \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy &= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma} \frac{2xP + 2yQ + R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS.\end{aligned}$$

### 习题 11-6

### 高斯公式 \* 通量与散度

1. 利用高斯公式计算曲面积分:

(1)  $\oiint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ , 其中  $\Sigma$  为平面  $x=0, y=0, z=0, x=a, y=a, z=a$  所围成的立体的表面的外侧;

\* (2)  $\oiint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$ , 其中  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  的外侧;

\* (3)  $\oiint_{\Sigma} xz^2 dydz + (x^2y - z^3) dzdx + (2xy + y^2z) dxdy$ , 其中  $\Sigma$  为上半球体  $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq a^2$  的表面外侧;

(4)  $\oiint_{\Sigma} x dydz + y dzdx + z dxdy$ , 其中  $\Sigma$  是界于  $z=0$  和  $z=3$  之间的圆柱体  $x^2 + y^2 \leq 9$  的整个表面的外侧;

(5)  $\oiint_{\Sigma} 4xz dydz - y^2 dzdx + yz dxdy$ , 其中  $\Sigma$  是平面  $x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1$  所围成的立方体的全表面的外侧.

解 (1)

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \\
 &= 2 \iiint_{\Omega} (x + y + z) dv \\
 &\stackrel{\text{对称性}}{=} 6 \iiint_{\Omega} z dv = 6 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a z dz \\
 &= 6 \cdot a \cdot a \cdot \frac{a^2}{2} = 3a^4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \text{原式} &= \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \\
 &= 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv \\
 &\stackrel{\text{球面坐标}}{=} 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr \\
 &= 3 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{12}{5} \pi a^5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \text{原式} &= \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \\
 &= \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2 + y^2) dv \\
 &\stackrel{\text{球面坐标}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr \\
 &= 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{2}{5} \pi a^5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \text{原式} &= \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \\
 &= \iiint_{\Omega} (1 + 1 + 1) dv = 3 \iiint_{\Omega} dv \\
 &= 3 \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 81\pi.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \text{原式} &= \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \\
 &= \iiint_{\Omega} (4z - 2y + y) dv \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (4z - y) dz \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^1 (2 - y) dy = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

注 在计算上面的积分  $\iiint_{\Omega} (4z - 2y + y) dv$  时, 如果利用被积函数和积分区域关于积分变量的对称性, 可知  $\iiint_{\Omega} z dv = \iiint_{\Omega} y dv$ , 于是

$$\iiint_{\Omega} (4z - 2y + y) dv = \iiint_{\Omega} 3z dv = 3 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 z dz = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

从而可简化运算.

\* 2. 求下列向量  $\mathbf{A}$  穿过曲面  $\Sigma$  流向指定侧的通量:

(1)  $\mathbf{A} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ ,  $\Sigma$  为圆柱  $x^2 + y^2 \leq a^2$  ( $0 \leq z \leq h$ ) 的全表面, 流向外侧;

(2)  $\mathbf{A} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$ ,  $\Sigma$  为立方体  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$  的全表面, 流向外侧;

(3)  $\mathbf{A} = (2x + 3z)\mathbf{i} - (xz + y)\mathbf{j} + (y^2 + 2z)\mathbf{k}$ ,  $\Sigma$  是以点  $(3, -1, 2)$  为球心, 半径  $R=3$  的球面, 流向外侧.

解 (1) 通量  $\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$

$$\begin{aligned} &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \\ &= \iiint_{\Omega} \left[ \frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xz)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} \right] dv = \iiint_{\Omega} 0 dv = 0. \end{aligned}$$

(2) 通量  $\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} dv$

$$\begin{aligned} &= \iiint_{\Omega} \left[ \frac{\partial(2x - z)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2y)}{\partial y} + \frac{\partial(-xz^2)}{\partial z} \right] dv \\ &= \iiint_{\Omega} (2 + x^2 - 2xz) dv \\ &= 2a^3 + \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x^2 - 2xz) dz \\ &= 2a^3 - \frac{a^5}{6} = a^3 \left( 2 - \frac{a^2}{6} \right). \end{aligned}$$

(3) 通量  $\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} dv$

$$\begin{aligned} &= \iiint_{\Omega} \left[ \frac{\partial(2x + 3z)}{\partial x} + \frac{\partial(-xz - y)}{\partial y} + \frac{\partial(y^2 + 2z)}{\partial z} \right] dv \\ &= \iiint_{\Omega} (2 - 1 + 2) dv = 3 \iiint_{\Omega} dv \end{aligned}$$



$$= 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 108\pi.$$

\* 3. 求下列向量场  $A$  的散度:

$$(1) A = (x^2 + yz)i + (y^2 + xz)j + (z^2 + xy)k;$$

$$(2) A = e^{xy}i + \cos(xy)j + \cos(xz^2)k;$$

$$(3) A = y^2i + xyj + xzk.$$

解 (1)  $P = x^2 + yz, Q = y^2 + xz, R = z^2 + xy,$

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x + 2y + 2z.$$

$$(2) P = e^{xy}, Q = \cos(xy), R = \cos(xz^2),$$

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = ye^{xy} - x \sin(xy) - 2xz \sin(xz^2).$$

$$(3) P = y^2, Q = xy, R = xz,$$

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 + x + x = 2x.$$

4. 设  $u(x, y, z), v(x, y, z)$  是两个定义在闭区域  $\Omega$  上的具有二阶连续偏导数的函数,  $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}$  依次表示  $u(x, y, z), v(x, y, z)$  沿  $\Sigma$  的外法线方向的方向导数.

证明

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx dy dz = \oint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

其中  $\Sigma$  是空间闭区域  $\Omega$  的整个边界曲面. 这个公式叫做格林第二公式.

证 由教材本节例 3 证明的格林第一公式知:

$$\iiint_{\Omega} u \Delta v dx dy dz = \oint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

在此公式中将函数  $u$  和  $v$  交换位置, 得

$$\iiint_{\Omega} v \Delta u dx dy dz = \oint_{\Sigma} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz$$

将上面两个式子相减即得

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx dy dz = \oint_{\Sigma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

\* 5. 利用高斯公式推证阿基米德原理: 浸没在液体中的物体所受液体的压力的合力(即浮力)的方向铅直向上、其大小等于这物体所排开的液体的重力.

证 取液面为  $xOy$  面,  $z$  轴铅直向上. 设液体的密度为  $\rho$ . 在物体表面  $\Sigma$  上取面积元素  $dS, M(x, y, z)$  为  $dS$  上的一点 ( $z \leq 0$ ),  $\Sigma$  在点  $M$  处的外法线向量的方向余弦为  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ , 则  $dS$  所受液体的压力在  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴上的分量

分别为

$$\rho z \cos \alpha dS, \rho z \cos \beta dS, \rho z \cos \gamma dS.$$

$\Sigma$  所受的液体的总压力在各坐标轴上的分量等于上列各分量元素在  $\Sigma$  上的积分. 由高斯公式可算得

$$\begin{aligned} F_x &= \oiint_{\Sigma} \rho z \cos \alpha dS = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho z)}{\partial x} dv = \iiint_{\Omega} 0 dv = 0; \\ F_y &= \oiint_{\Sigma} \rho z \cos \beta dS = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho z)}{\partial y} dv = \iiint_{\Omega} 0 dv = 0; \\ F_z &= \oiint_{\Sigma} \rho z \cos \gamma dS = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho z)}{\partial z} dv = \iiint_{\Omega} \rho dv = \rho V, \end{aligned}$$

( $V$  为  $\Omega$  的体积), 故合力

$$F = \rho V k,$$

此力的方向铅直向上, 大小等于被物体排开的液体的重力.



## 斯托克斯公式 \* 环流量与旋度

1. 试对曲面  $\Sigma: z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1, P = y^2, Q = x, R = z^2$  验证斯托克斯公式.

解 按右手法则,  $\Sigma$  取上侧,  $\Sigma$  的边界  $\Gamma$  为圆周  $x^2 + y^2 = 1, z = 1$ , 从  $z$  轴正向看去, 取逆时针方向.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} &= \iint_{\Sigma} (1 - 2y) dx dy = \iint_{D_{xy}} (1 - 2y) dx dy \\ &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - 2\rho \sin \theta) \rho d\rho = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\rho^2}{2} - \frac{2}{3} \rho^3 \sin \theta \right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin \theta \right) d\theta = \pi; \end{aligned}$$

$\Gamma$  的参数方程可取为  $x = \cos t, y = \sin t, z = 1, t$  从 0 变到  $2\pi$ , 故

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t + \cos^2 t) dt = \pi,$$

两者相等, 斯托克斯公式得到验证.

\* 2. 利用斯托克斯公式, 计算下列曲线积分:

(1)  $\oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz$ , 其中  $\Gamma$  为圆周  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$ ,

若从  $x$  轴的正向看去, 这圆周是取逆时针方向;

(2)  $\oint_{\Gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$ , 其中  $\Gamma$  为椭圆  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ), 若从  $x$  轴正向看去, 这椭圆是取逆时针方向;

(3)  $\oint_{\Gamma} 3ydx - xzdy + yz^2dz$ , 其中  $\Gamma$  是圆周  $x^2 + y^2 = 2z, z = 2$ , 若从  $z$  轴正向看去, 这圆周是取逆时针方向;

(4)  $\oint_{\Gamma} 2ydx + 3xdy - z^2dz$ , 其中  $\Gamma$  是圆周  $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = 0$ , 若从  $z$  轴正向看去, 这圆周是取逆时针方向.

解 (1) 取  $\Sigma$  为平面  $x + y + z = 0$  的上侧被  $\Gamma$  所围成的部分, 则  $\Sigma$  的面积为  $\pi a^2$ ,  $\Sigma$  的单位法向量为

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \text{ (图 11-12).}$$

由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} ydx + zdy + xdz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS \\ &= \iint_{\Sigma} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) dS = -\frac{3}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS \\ &= -\sqrt{3} \pi a^2. \end{aligned}$$

(2) 如图 11-13, 取  $\Sigma$  为平面  $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$  的上侧被  $\Gamma$  所围成的部分,  $\Sigma$  的单位法向量  $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ . 由斯托克斯公式

$$\begin{aligned} &\oint_{\Gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz \\ &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} dS \\ &= \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \iint_{\Sigma} dS, (*) \end{aligned}$$

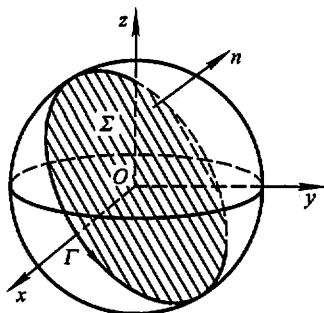


图 11-12

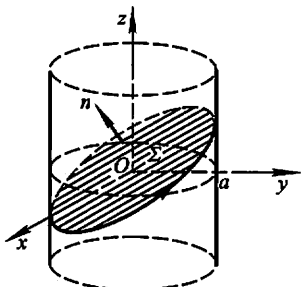


图 11-13

现用两种方法来求  $\iint_{\Sigma} dS$ .

方法一 由于  $\iint_{\Sigma} dS = \Sigma$  的面积  $A$ , 而  $A \cdot \cos \gamma = A \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域的面积  $= \pi a^2$ , 故

$$\iint_{\Sigma} dS = \pi a^2 / \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pi a \sqrt{a^2 + b^2}.$$

方法二 用曲面积分计算法

由于在  $\Sigma$  上,  $z = b - \frac{b}{a}x$ ,

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} dx dy \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} dx dy, \end{aligned}$$

又  $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$ , 故

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} dS &= \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} dx dy = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \cdot \pi a^2 \\ &= \pi a \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

将所求得的  $\iint_{\Sigma} dS$  代入 (\*) 式, 得

$$\text{原式} = \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \pi a \sqrt{a^2 + b^2} = -2\pi a(a+b).$$

(3) 取  $\Sigma$  为平面  $z=2$  的上侧被  $\Gamma$  所围成的部分, 则  $\Sigma$  的单位法向量为  $n=(0,0,1)$ ,  $\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域  $D_{xy}$  为  $x^2 + y^2 \leq 4$ . 于是由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned}
 \oint_{\Gamma} 3ydx - xzdy + yz^2dz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} dS \\
 &= - \iint_{\Sigma} (z+3) dS = - \iint_{D_{xy}} (2+3) dx dy = -5 \cdot \pi \cdot 2^2 \\
 &= -20\pi.
 \end{aligned}$$

(4)  $\Gamma$  即为  $xOy$  面上的圆周  $x^2 + y^2 = 9$ , 取  $\Sigma$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 9$  的上侧, 则由斯托克斯公式

$$\begin{aligned}
 \oint_{\Gamma} 2ydx + 3xdy - z^2dz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} \\
 &= \iint_{\Sigma} dxdy = \iint_{D_{xy}} dxdy = 9\pi.
 \end{aligned}$$

\* 3. 求下列向量场  $A$  的旋度:

(1)  $A = (2z - 3y)i + (3x - z)j + (y - 2x)k$ ;

(2)  $A = (z + \sin y)i - (z - x \cos y)j$ ;

(3)  $A = ix^2 \sin y + jy^2 \sin(xz) + kxys \sin(\cos z)$ .

解 (1)  $\operatorname{rot} A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z - 3y & 3x - z & y - 2x \end{vmatrix} = 2i + 4j + 6k.$

(2)  $\operatorname{rot} A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z + \sin y & -(z - x \cos y) & 0 \end{vmatrix} = i + j + (\cos y - \cos y)k$   
 $= i + j.$

(3)  $\operatorname{rot} A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 \sin y & y^2 \sin(xz) & xys \sin(\cos z) \end{vmatrix}$   
 $= [x \sin(\cos z) - xy^2 \cos(xz)]i - y \sin(\cos z)j$   
 $+ [y^2 z \cos(xz) - x^2 \cos y]k.$

\* 4. 利用斯托克斯公式把曲面积分  $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} A \cdot n dS$  化为曲线积分, 并计算积分

值,其中  $\mathbf{A}$ 、 $\Sigma$  及  $\mathbf{n}$  分别如下:

(1)  $\mathbf{A} = y^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ ,  $\Sigma$  为上半球面  $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$  的上侧,  $\mathbf{n}$  是  $\Sigma$  的单位法向量;

(2)  $\mathbf{A} = (y-z)\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$ ,  $\Sigma$  为立方体  $\{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2\}$  的表面外侧去掉  $xOy$  面上的那个底面,  $\mathbf{n}$  是  $\Sigma$  的单位法向量.

解 (1)  $\Sigma$  的正向边界曲线  $\Gamma$  为  $xOy$  面上的圆周  $x^2 + y^2 = 1$ , 从  $z$  轴正向看去  $\Gamma$  取逆时针向,  $\Gamma$  的参数方程为  $x = \cos t, y = \sin t, z = 0, t$  从 0 变到  $2\pi$ .

由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \\ &= \oint_{\Gamma} y^2 dx + xy dy + xz dz \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin^2 t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \sin t \cdot \cos t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos^2 t) d\cos t = 0.\end{aligned}$$

(2)  $\Sigma$  的边界曲线  $\Gamma$  为  $xOy$  面上由直线  $x=0, y=0, x=2, y=2$  所围成的正方形的边界, 从  $z$  轴正向看去取逆时针向. 由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \\ &= \oint_{\Gamma} (y-z) dx + yz dy - xz dz \quad (\text{代入 } z=0) \\ &= \oint_{\Gamma} y dx = \int_2^0 2 dx = -4.\end{aligned}$$

\* 5. 求下列向量场  $\mathbf{A}$  沿闭曲线  $\Gamma$  (从  $z$  轴正向看  $\Gamma$  依逆时针方向) 的环流量:

(1)  $\mathbf{A} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + c\mathbf{k}$  ( $c$  为常量),  $\Gamma$  为圆周  $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ ;

(2)  $\mathbf{A} = (x-z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$ , 其中  $\Gamma$  为圆周  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0$ .

解 (1)  $\Gamma$  的参数方程为  $x = \cos t, y = \sin t, z = 0, t$  从 0 变到  $2\pi$ , 于是所求环流量为

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} ds &= \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \\ &= \oint_{\Gamma} -y dx + x dy + c dz \\ &= \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + \cos t(\cos t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.\end{aligned}$$

(2)  $\Gamma$  是  $xOy$  面上的圆周  $x^2 + y^2 = 4$  (从  $z$  轴正向看  $\Gamma$  依逆时针方向), 它的参数方程为  $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 0, t$  从  $0$  变到  $2\pi$ . 于是所求的环流量为

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} ds &= \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \\&= \oint_{\Gamma} (x - z) dx + (x^3 + yz) dy - 3xy^2 dz \quad (\text{代入 } z = 0) \\&= \oint_{\Gamma} x dx + x^3 dy \\&= \int_0^{2\pi} [2\cos t \cdot (-2\sin t) + 8\cos^3 t \cdot 2\cos t] dt \\&= -4 \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt + 16 \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt \\&= 0 + 64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt^{\text{①}} \\&= 64 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 12\pi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{注}^{\text{①}} \quad \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt &\stackrel{\text{周期性}}{=} 2 \int_0^{\pi} \cos^4 t dt \\&= 2 \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 t dt \right],\end{aligned}$$

$$\text{由于} \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 t dt \stackrel{u = \pi - t}{=} - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^4 u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u du,$$

$$\text{故得} \quad \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt.$$

\* 6. 证明  $\text{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{rot} \mathbf{a} + \text{rot} \mathbf{b}$ .

证 设  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$ ,

其中  $a_x, a_y, a_z; b_x, b_y, b_z$  均为  $x, y, z$  的函数, 则

$$\begin{aligned}\text{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \text{rot}((a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k}) \\&= \left[ \frac{\partial(a_z + b_z)}{\partial y} - \frac{\partial(a_y + b_y)}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[ \frac{\partial(a_x + b_x)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z + b_z)}{\partial x} \right] \mathbf{j} \\&\quad + \left[ \frac{\partial(a_y + b_y)}{\partial x} - \frac{\partial(a_x + b_x)}{\partial y} \right] \mathbf{k} \\&= \left[ \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\&\quad + \left[ \left( \frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\&= \text{rot} \mathbf{a} + \text{rot} \mathbf{b}.\end{aligned}$$

\*7. 设  $u = u(x, y, z)$  具有二阶连续偏导数, 求  $\text{rot}(\text{grad } u)$ .

解  $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial u}{\partial y}j + \frac{\partial u}{\partial z}k,$

$$\begin{aligned}\text{rot}(\text{grad } u) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) i + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) j \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) k \quad (\text{由于各二阶偏导数连续}) \\ &= 0i + 0j + 0k = 0.\end{aligned}$$

## 总习题十一

### 1. 填空

(1) 第二类曲线积分  $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$  化成第一类曲线积分是 \_\_\_\_\_, 其中  $\alpha, \beta, \gamma$  为有向曲线弧  $\Gamma$  在点  $(x, y, z)$  处的 \_\_\_\_\_ 的方向角;

(2) 第二类曲面积分  $\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rxdy$  化成第一类曲面积分是 \_\_\_\_\_, 其中  $\alpha, \beta, \gamma$  为有向曲面  $\Sigma$  在点  $(x, y, z)$  处的 \_\_\_\_\_ 的方向角.

解 (1) 由教材本章第二节的公式(3), 可知第一个空格应填:  $\int_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$ ; 第二个空格应填: 切向量.

(2) 由教材本章第五节的公式(9), 可知第一个空格应填:  $\iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$ ; 第二个空格应填: 法向量.

### 2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设曲面  $\Sigma$  是上半球面:  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$ , 曲面  $\Sigma_1$  是曲面  $\Sigma$  在第一卦限中的部分, 则有 \_\_\_\_\_.

(A)  $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS.$

(B)  $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS.$

(C)  $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS.$

(D)  $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS.$

解 应选(C). 先说明(A)不对. 由于  $\Sigma$  关于  $yOz$  面对称, 被积函数  $x$  关于  $x$  是



奇函数,所以 $\iint_{\Sigma} x dS = 0$ . 但在 $\Sigma_1$ 上,被积函数 $x$ 连续且大于零,所以 $\iint_{\Sigma_1} x dS > 0$ . 因此 $\iint_{\Sigma} x dS \neq 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$ . 类似可说明(B)和(D)不对. 再说明(C)正确. 由于 $\Sigma$ 关于 $yOz$ 面和 $zOx$ 面均对称,被积函数 $z$ 关于 $x$ 和 $y$ 均为偶函数,故 $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z dS$ ;而在 $\Sigma_1$ 上,字母 $x, y, z$ 是对称的. 故 $\iint_{\Sigma_1} z dS = \iint_{\Sigma_1} x dS$ ,因此有 $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$ .

3. 计算下列曲线积分:

(1)  $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$ , 其中 $L$ 为圆周 $x^2 + y^2 = ax$ ;

(2)  $\int_{\Gamma} z ds$ , 其中 $\Gamma$ 为曲线 $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t (0 \leq t \leq t_0)$ ;

(3)  $\int_L (2a - y) dx + x dy$ , 其中 $L$ 为摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 上对应 $t$ 从0到 $2\pi$ 的一段弧;

(4)  $\int_{\Gamma} (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz$ , 其中 $\Gamma$ 是曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上由 $t_1 = 0$ 到 $t_2 = 1$ 的一段弧;

(5)  $\int_{\Gamma} (e^x \sin y - 2y) dx + (e^x \cos y - 2) dy$ , 其中 $L$ 为上半圆周 $(x - a)^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$ , 沿逆时针方向;

(6)  $\oint_{\Gamma} xyz dz$ , 其中 $\Gamma$ 是用平面 $y = z$ 截球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所得的截痕, 从 $z$ 轴的正向看去, 沿逆时针方向.

解 (1) 解法一  $L$ 的方程即为 $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ , 故可取 $L$ 的参数方程为 $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t, y = \frac{a}{2} \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ . 于是

$$\begin{aligned} \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}a}{2} \sqrt{1 + \cos t} \cdot \sqrt{\left(-\frac{a}{2} \sin t\right)^2 + \left(\frac{a}{2} \cos t\right)^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}a^2}{4} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t} dt = \frac{\sqrt{2}a^2}{4} \cdot \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt \\ &= 2a^2 \int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2} d\frac{t}{2} = 2a^2. \end{aligned}$$

解法二  $L$ 的极坐标方程为 $\rho = a \cos \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ ,

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta = a d\theta,$$

因此  $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cos \theta \cdot a d\theta = 2a^2$ .

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int_{\Gamma} z ds &= \int_0^{t_0} t \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt \\
 &= \int_0^{t_0} t \sqrt{2 + t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \sqrt{2 + t^2} d(2 + t^2) \\
 &= \frac{1}{3} (2 + t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{t_0} = \frac{1}{3} [(2 + t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int_L (2a - y) dx + x dy &= \int_0^{2\pi} [(2a - a + a \cos t) \cdot a(1 - \cos t) + a(t - \sin t) \cdot a \sin t] dt \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = a^2 [-t \cos t]_0^{2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \cos t dt \\
 &= -2\pi a^2 + 0 = -2\pi a^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \int_{\Gamma} (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz &= \int_0^1 [(t^4 - t^6) \cdot 1 + 2t^2 \cdot t^3 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2] dt \\
 &= \int_0^1 (3t^6 - 2t^4) dt = \frac{1}{35}.
 \end{aligned}$$

(5) 如图 11-14, 添加有向线段  $OA: y=0, x$  从 0 变到  $2a$ , 则在由  $L$  与  $OA$  所围成的闭区域  $D$  上应用格林公式可得

$$\begin{aligned}
 \int_{L+OA} (e^x \sin y - 2y) dx + (e^x \cos y - 2) dy &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= \iint_D (e^x \cos y - e^x \cos y + 2) dx dy \\
 &= 2 \iint_D dx dy = \pi a^2,
 \end{aligned}$$

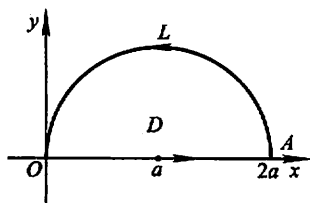


图 11-14

于是

$$\begin{aligned}
 \int_L (e^x \sin y - 2y) dx + (e^x \cos y - 2) dy &= \pi a^2 - \int_{OA} (e^x \sin y - 2y) dx + (e^x \cos y - 2) dy \\
 &= \pi a^2 - \int_0^{2a} (e^x \sin 0 - 2 \cdot 0) dx = \pi a^2.
 \end{aligned}$$

注 本题通过添加辅助路径并利用格林公式, 将难以直接计算的曲线积分

化为一个易于计算的二重积分和另一个易于计算的曲线积分之差,从而方便地求得结果.这是格林公式的用处之一,值得注意.

(6) 由  $\Gamma$  的一般方程  $\begin{cases} y = z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$  可得  $x^2 + 2y^2 = 1$ .

从而可令  $x = \cos t, y = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, z = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, t$  从 0 变到  $2\pi$ . 于是

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} xyz dz &= \int_0^{2\pi} \cos t \left( \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{\cos t}{\sqrt{2}} dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{16}. \end{aligned}$$

4. 计算下列曲面积分:

(1)  $\iint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2}$ , 其中  $\Sigma$  是介于平面  $z = 0$  及  $z = H$  之间的圆柱面  $x^2 + y^2 = R^2$ ;

(2)  $\iint_{\Sigma} (y^2 - z) dydz + (z^2 - x) dzdx + (x^2 - y) dx dy$ , 其中  $\Sigma$  为锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq h)$  的外侧;

(3)  $\iint_{\Sigma} x dydz + y dzdx + z dx dy$ , 其中  $\Sigma$  为半球面  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  的上侧;

(4)  $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$ , 其中  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1 (x \geq 0, y \geq 0)$  的外侧.

解 (1) 将  $\Sigma$  分成  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  两片,  $\Sigma_1$  为  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $\Sigma_2$  为  $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  在  $zOx$  面上的投影区域均为

$$D_x = \{(x, z) \mid 0 \leq z \leq H, -R \leq x \leq R\}.$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_1} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} &= \iint_{D_x} \frac{1}{R^2 + z^2} \sqrt{1 + \frac{(-x)^2}{R^2 - x^2}} dx dz \\ &= \int_0^H \frac{1}{R^2 + z^2} dz \cdot \int_{-R}^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \\ &= \left[ \frac{1}{R} \arctan \frac{z}{R} \right]_0^H \cdot \left[ R \arcsin \frac{x}{R} \right]_{-R}^R \\ &= \pi \arctan \frac{H}{R}. \end{aligned}$$

又由于被积函数关于  $y$  是偶函数, 积分曲面  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  关于  $zOx$  面对称, 故

$$\iint_{\Sigma_2} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{\Sigma_1} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} = \pi \arctan \frac{H}{R}.$$

由此得

$$\iint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} = 2\pi \arctan \frac{H}{R}.$$

(2) 添加辅助曲面  $\Sigma_1 = \{(x, y, z) \mid z = h, x^2 + y^2 \leq h^2\}$ , 取上侧, 则在由  $\Sigma$  和  $\Sigma_1$  所包围的空间闭区域  $\Omega$  上应用高斯公式得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma+\Sigma_1} (y^2 - z) dydz + (z^2 - x) dzdx + (x^2 - y) dx dy \\ &= \iiint_{\Omega} \left[ \frac{\partial(y^2 - z)}{\partial x} + \frac{\partial(z^2 - x)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2 - y)}{\partial z} \right] dv = \iiint_{\Omega} 0 \cdot dv = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \text{原式} &= - \iint_{\Sigma_1} (y^2 - z) dydz + (z^2 - x) dzdx + (x^2 - y) dx dy \\ &= - \iint_{\Sigma_1} (x^2 - y) dx dy = - \iint_{D_{xy}} (x^2 - y) dx dy, \end{aligned}$$

其中  $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq h^2\}$ .

在计算  $\iint_{D_{xy}} (x^2 - y) dx dy$  时, 由对称性易知  $\iint_{D_{xy}} y dx dy = 0$ , 又  $\iint_{D_{xy}} x^2 dx dy = \iint_{D_{xy}} y^2 dx dy$ , 故

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} (x^2 - y) dx dy &= \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \rho^2 \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{4} h^4. \end{aligned}$$

从而得  $\text{原式} = -\frac{\pi}{4} h^4$ .

**注** 本题若用第二类曲面积分的计算公式直接计算, 则运算将十分繁复. 现在通过添加辅助曲面并利用高斯公式, 就将原积分化为辅助曲面上的一个容易计算的曲面积分, 从而达到了化繁为简、化难为易的目的. 这种做法与前面第 3 (5) 题利用格林公式化简曲线积分计算的做法是类似的, 请读者注意比较, 并思考这样的问题: 要使这种做法可行, 所给的曲线积分(曲面积分)应具备什么条件?

(3) 添加辅助曲面  $\Sigma_1 = \{(x, y, z) \mid z = 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$ , 取下侧, 则在由  $\Sigma$  和  $\Sigma_1$  所围成的空间闭区域  $\Omega$  上应用高斯公式得

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zxdy &= \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dv \\ &= 3 \iiint_{\Omega} dv = 3 \cdot \frac{2\pi R^3}{3} = 2\pi R^3,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 2\pi R^3 - \iint_{\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zxdy \\ &= 2\pi R^3 - 0 = 2\pi R^3.\end{aligned}$$

(4) 解法一 将  $\Sigma$  分成  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  两片, 其中  $\Sigma_1$ :  $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ), 取上侧;  $\Sigma_2$ :  $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ), 取下侧.  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  在  $xOy$  面上的投影区域均为  $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$  (图 11-15). 于是

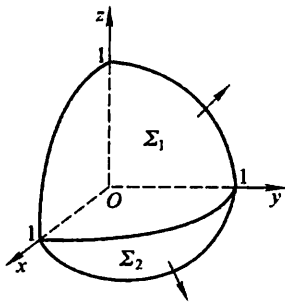


图 11-15

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_1} xyz dx dy &= \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\ &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \cdot \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho \\ &\stackrel{\rho = \sin t}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t - \sin^5 t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{15};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_2} xyz dx dy &= - \iint_{D_{xy}} xy (-\sqrt{1-x^2-y^2}) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \frac{1}{15},\end{aligned}$$

因而

$$\iint_{\Sigma} xyz dx dy = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15}.$$

解法二 应用高斯公式计算.

添加辅助曲面  $\Sigma_3$ :  $x = 0$  (取后侧);  $\Sigma_4$ :  $y = 0$  (取左侧), 则有

$$\iint_{\Sigma_3} xyz dx dy = \iint_{\Sigma_4} xyz dx dy = 0.$$

在由  $\Sigma, \Sigma_3$  和  $\Sigma_4$  所围成的空间闭区域  $\Omega$  上应用高斯公式, 得

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} xyz dx dy &= \iint_{\Sigma+\Sigma_3+\Sigma_4} xyz dx dy = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(xyz)}{\partial z} dv \\
 &= \iiint_{\Omega} xy dv = \iint_{D_{xy}} xy dx dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \\
 &= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \frac{2}{15}.
 \end{aligned}$$

5. 证明:  $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$  在整个  $xOy$  平面除去  $y$  的负半轴及原点的区域  $G$  内是某个二元函数的全微分, 并求出一个这样的二元函数.

证  $G$  为平面单连通域, 在  $G$  内  $P = \frac{x}{x^2+y^2}, Q = \frac{y}{x^2+y^2}$  具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x^2+y^2} \right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故  $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$  在  $G$  内是某个二元函数  $u(x, y)$  的全微分.

取折线积分路径  $(0, 1) \rightarrow (x, 1) \rightarrow (x, y)$  (图 11-16), 则

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \int_0^x \frac{xdx}{x^2+1} + \int_1^y \frac{ydy}{x^2+y^2} \\
 &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} [\ln(x^2+y^2)]_1^y \\
 &= \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2).
 \end{aligned}$$

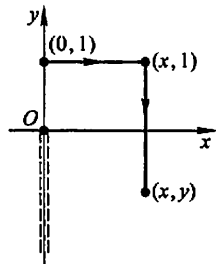


图 11-16

6. 设在半平面  $x > 0$  内有力  $F = -\frac{k}{\rho^3}(xi + yj)$  构成力场, 其中  $k$  为常数,  $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ . 证明在此力场中场力所作的功与所取的路径无关.

证 半平面  $x > 0$  是单连通域. 在此区域内,  $P = -\frac{kx}{\rho^3}, Q = -\frac{ky}{\rho^3}$  具有一阶连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{3kxy}{\rho^5} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故在此区域内, 场力  $F$  沿曲线  $L$  所作的功, 即

$$\int_L F \cdot dr = -k \int_L \frac{xdx+ydy}{\rho^3}$$

与路径无关.

7. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内具有一阶连续导数,  $L$  是上半平面 ( $y > 0$ ) 内的有向分段光滑曲线, 其起点为  $(a, b)$ , 终点为  $(c, d)$ . 记

$$I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy,$$

(1) 证明曲线积分  $I$  与路径无关;

(2) 当  $ab = cd$  时, 求  $I$  的值.

(1) 证 因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] \right\} &= f(xy) - \frac{1}{y^2} + xy f'(xy) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] \right\} \end{aligned}$$

在上半平面这个单连通域内处处成立, 所以在上半平面内曲线积分与路径  $L$  无关.

(2) 解 由于  $I$  与路径无关, 故可取积分路径  $L$  为由点  $(a, b)$  到点  $(c, b)$  再到点  $(c, d)$  的有向折线, 从而得

$$\begin{aligned} I &= \int_a^c \frac{1}{b} [1 + b^2 f(bx)] dx + \int_b^d \frac{c}{y^2} [y^2 f(cy) - 1] dy \\ &= \frac{c-a}{b} + \int_a^c b f(bx) dx + \int_b^d c f(cy) dy + \frac{c}{d} - \frac{c}{b} \\ &= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + \int_{ab}^{bc} f(t) dt + \int_{bc}^{cd} f(t) dt \\ &= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + \int_{ab}^{cd} f(t) dt, \end{aligned}$$

当  $ab = cd$  时,  $\int_{ab}^{cd} f(t) dt = 0$ , 由此得

$$I = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}.$$

8. 求均匀曲面  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  的质心的坐标.

解 设质心位置为  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ . 由对称性可知质心位于  $z$  轴上, 故  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ .

$\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域  $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$ .

$$\begin{aligned} \text{由于} \quad \iint_{\Sigma} z dS &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= a \iint_{D_{xy}} dx dy = a \cdot \pi a^2 = \pi a^3, \end{aligned}$$

又  $\Sigma$  的面积  $A = 2\pi a^2$ ,

$$\bar{z} = \frac{\iint_{\Sigma} z dS}{A} = \frac{\pi a^3}{2\pi a^2} = \frac{a}{2},$$

所求的质心为  $(0, 0, \frac{a}{2})$ .

9. 设  $u(x, y), v(x, y)$  在闭区域  $D$  上都具有二阶连续偏导数, 分段光滑的曲线  $L$  为  $D$  的正向边界曲线. 证明:

$$(1) \iint_D v \Delta u \, dx dy = - \iint_D (\text{grad } u \cdot \text{grad } v) \, dx dy + \int_L v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds;$$

$$(2) \iint_D (u \Delta v - v \Delta u) \, dx dy = \int_L \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, ds,$$

其中  $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}$  分别是  $u, v$  沿  $L$  的外法线向量  $n$  的方向导数, 符号  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  称二维拉普拉斯算子.

证 (1) 如图 11-17,  $n$  为有向曲线  $L$  的外法线向量,  $\tau$  为  $L$  的切线向量. 设  $x$  轴到  $n$  和  $\tau$  的转角分别为  $\varphi$  和  $\alpha$ , 则  $\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}$ , 且  $n$  的方向余弦为  $\cos \varphi$ ,

$\sin \varphi$ ;  $\tau$  的方向余弦为  $\cos \alpha, \sin \alpha$ . 于是

$$\begin{aligned} \oint_L v \frac{\partial u}{\partial n} \, ds &= \oint_L v (u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi) \, ds \\ &= \oint_L v (u_x \sin \alpha - u_y \cos \alpha) \, ds \quad (\cos \alpha \, ds = dx, \sin \alpha \, ds = dy) \\ &= \oint_L v u_x \, dy - v u_y \, dx \\ &\stackrel{\text{格林公式}}{=} \iint_D \left[ \frac{\partial (v u_x)}{\partial x} - \frac{\partial (-v u_y)}{\partial y} \right] \, dx dy \\ &= \iint_D [(u_x v_x + v u_{xx}) + (u_y v_y + v u_{yy})] \, dx dy \\ &= \iint_D v (u_{xx} + u_{yy}) \, dx dy + \iint_D (u_x v_x + u_y v_y) \, dx dy \\ &= \iint_D v \Delta u \, dx dy + \iint_D (\text{grad } u \cdot \text{grad } v) \, dx dy, \end{aligned}$$

把上式右端第二个积分移到左端即得所要证明的等式.

(2) 在(1)证得的等式中交换  $u, v$  的位置, 可得

$$\iint_D u \Delta v \, dx dy = - \iint_D (\text{grad } v \cdot \text{grad } u) \, dx dy + \int_L u \frac{\partial v}{\partial n} \, ds,$$

在此式的两端分别减去(1)中等式的两端, 即得所需证明的等式.

\* 10. 求向量  $A = xi + yj + zk$  通过闭区域  $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$  的边界曲面流向外侧的通量.

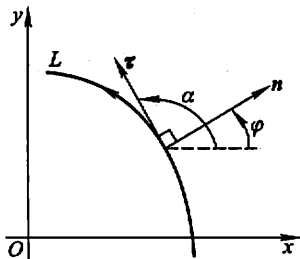


图 11-17



$$\text{解 通量 } \Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} x dydz + y dzdx + z dx dy$$

$$\stackrel{\text{高斯公式}}{=} \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dv$$

$$= \iiint_{\Omega} (1+1+1) dv = 3 \iiint_{\Omega} dv = 3 \cdot 1 = 3.$$

11. 求力  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$  沿有向闭曲线  $\Gamma$  所作的功, 其中  $\Gamma$  为平面  $x+y+z=1$  被三个坐标面所截成的三角形的整个边界, 从  $z$  轴正向看去, 沿顺时针方向.

$$\text{解 } W = \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz.$$

下面用两种方法来计算上面这个积分.

方法一 化为定积分直接计算. 如图 11-18,  $\Gamma$  由  $AB$ 、 $BC$ 、 $CA$  三条有向线段组成,

$AB: z=0, x=t, y=1-t, t$  从 0 变到 1;

$BC: y=0, x=t, z=1-t, t$  从 1 变到 0;

$CA: x=0, y=t, z=1-t, t$  从 0 变到 1.

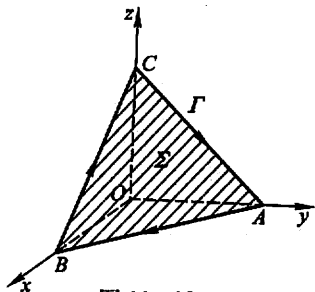


图 11-18

于是

$$\int_{AB} y dx + z dy + x dz = \int_{AB} y dx = \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2};$$

$$\int_{BC} y dx + z dy + x dz = \int_{BC} x dz = \int_1^0 t \cdot (-1) dt = \frac{1}{2};$$

$$\int_{CA} y dx + z dy + x dz = \int_{CA} z dy = \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}.$$

$$\text{因此 } W = \oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} = \frac{3}{2}.$$

方法二 利用斯托克斯公式计算. 取  $\Sigma$  为平面  $x+y+z=1$  的下侧被  $\Gamma$  所围的部分, 则  $\Sigma$  在任一点处的单位法向量为  $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ , 由斯托克斯公式得

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS \\ &= \iint_{\Sigma} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) dS = \sqrt{3} \iint_{\Sigma} dS \\ &= \sqrt{3} \cdot (\Sigma \text{ 的面积}) = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

## 第十二章 无穷级数

### 习题 12-1

### 常数项级数的概念和性质

1. 写出下列级数的前五项:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

解 (1)  $\frac{1+1}{1+1^2} + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \frac{1+4}{1+4^2} + \frac{1+5}{1+5^2} + \cdots$

$$(2) \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \cdots$$

$$(3) \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} - \cdots$$

$$(4) \frac{1!}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \frac{5!}{5^5} + \cdots$$

2. 写出下列级数的一般项:

$$(1) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots;$$

$$(2) \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \cdots;$$

$$(3) \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{x}{2 \cdot 4} + \frac{x\sqrt{x}}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{x^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \cdots;$$

$$(4) \frac{a^2}{3} - \frac{a^3}{5} + \frac{a^4}{7} - \frac{a^5}{9} + \cdots$$

解 设  $u_n$  为级数的一般项, 通过观察, 不难看出:

$$(1) u_n = \frac{1}{2n-1}.$$

$$(2) u_n = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n}.$$

$$(3) u_n = \frac{x^{\frac{n}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)}.$$

$$(4) u_n = (-1)^{n-1} \frac{a^{n+1}}{2n+1}.$$

3. 根据级数收敛与发散的判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

$$(2) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots;$$

$$(3) \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{6} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{6} + \cdots.$$

解 设级数的部分和为  $s_n$ .

(1) 因为

$$\begin{aligned} s_n &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= \infty, \end{aligned}$$

所以根据定义可知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$  发散.

$$(2) \text{ 由于 } u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right), \text{ 从而}$$

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2n+1} \right], \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{2},$$

所以根据定义可知级数收敛.

$$(3) \text{ 由于 } u_n = \sin \frac{n\pi}{6} = \frac{2\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{n\pi}{6}}{2\sin \frac{\pi}{12}} = \frac{\cos \frac{2n-1}{12}\pi - \cos \frac{2n+1}{12}\pi}{2\sin \frac{\pi}{12}},$$

从而

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{12}} \left[ \left( \cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{3\pi}{12} \right) + \left( \cos \frac{3\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12} \right) + \cdots + \right. \\ &\quad \left. \left( \cos \frac{2n-1}{12}\pi - \cos \frac{2n+1}{12}\pi \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{12}} \left( \cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{2n+1}{12}\pi \right), \end{aligned}$$

因为当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\cos \frac{2n+1}{12} \pi$  的极限不存在, 所以  $s_n$  的极限不存在, 即级数发散.

4. 判定下列级数的收敛性:

$$(1) -\frac{8}{9} + \frac{8^2}{9^2} - \frac{8^3}{9^3} + \cdots + (-1)^n \frac{8^n}{9^n} + \cdots;$$

$$(2) \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3n} + \cdots;$$

$$(3) \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{3}} + \cdots;$$

$$(4) \frac{3}{2} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + \cdots + \frac{3^n}{2^n} + \cdots;$$

$$(5) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \cdots.$$

解 (1) 此级数为公比  $q = -\frac{8}{9}$  的等比级数, 因  $|q| < 1$ , 故该级数收敛.

(2) 此级数的部分和

$$s_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right),$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = +\infty$ , 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty,$$

即该级数发散.

(3) 此级数的一般项  $u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$ , 不满足级数收敛的必要条件, 故该级数发散.

(4) 此级数为公比  $q = \frac{3}{2}$  的等比级数, 因  $|q| > 1$ , 故该级数发散.

(5) 此级数的一般项  $u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$ , 注意到  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$  分别是公比  $q = \frac{1}{2}$  与  $q = \frac{1}{3}$  的等比级数, 而  $|q| < 1$ , 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$  均收敛. 根据收敛级

数的性质可知, 原级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$  收敛.

\* 5. 利用柯西审敛原理判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

$$(2) 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n};$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad |s_{n+p} - s_n| &= |u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots + u_{n+p}| \\ &= \left| \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+3}}{n+2} + \frac{(-1)^{n+4}}{n+3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+p+1}}{n+p} \right| \\ &= \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{n+p} \right|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{由于} \quad & \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{n+p} \\ &= \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left( \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) + \cdots + \begin{cases} \frac{1}{n+p}, & p \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}, & p \text{ 为偶数.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots + \frac{(-1)^{p-1}}{n+p} > 0, \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

于是, 当  $p$  为奇数时,

$$|s_{n+p} - s_n| = \frac{1}{n+1} - \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \cdots - \left( \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) < \frac{1}{n+1};$$

当  $p$  为偶数时,

$$|s_{n+p} - s_n| = \frac{1}{n+1} - \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \cdots - \left( \frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p-1} \right) - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n+1}.$$

因此, 对任意给定的正数  $\varepsilon$ , 取正整数  $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ , 则当  $n > N$  时, 对任何正整数  $p$ , 都有

$$|s_{n+p} - s_n| < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

根据柯西收敛原理知, 级数收敛.

(2) 当  $n$  是 3 的倍数时, 如果取  $p = 3n$ , 则必有

$$\begin{aligned} |s_{n+p} - s_n| &= \left| \frac{1}{n+1} + \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \frac{1}{n+4} + \left( \frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6} \right) + \cdots + \frac{1}{4n-2} + \left( \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) \right| \\ &> \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{4n-2} > \underbrace{\frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + \cdots + \frac{1}{4n}}_{n \uparrow} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

于是对  $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ , 不论  $N$  为何正整数, 当  $n > N$  并  $n$  是 3 的倍数, 且当  $p = 3n$  时, 就有

$$|s_{n+p} - s_n| > \varepsilon_0,$$

根据柯西收敛原理知,级数发散.

注 柯西收敛原理是这样叙述的:级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的充要条件为“对任意给定的正数  $\epsilon$ , 总存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 对任意的正整数  $p$ , 都有  $|s_{n+p} - s_n| < \epsilon$ .”

因此按柯西收敛原理, 判别级数发散的充要条件就是对上述条件的否定, 即“对某个正数  $\epsilon_0$ , 不论  $N$  取什么正整数, 至少有一个  $n(>N)$  且至少有一个  $p \in \mathbf{N}^+$ , 使得  $|s_{n+p} - s_n| \geq \epsilon_0$ .”

$$\begin{aligned}(3) \quad |s_{n+p} - s_n| &= |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \\&= \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \\&\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} \\&< \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

由此可知, 对任意给定的正数  $\epsilon$ , 取正整数  $N \geq \log_2 \frac{1}{\epsilon}$ , 当  $n > N$  时, 对一切正整数  $p$ , 都有  $|s_{n+p} - s_n| < \epsilon$ . 按柯西收敛原理, 该级数收敛.

(4) 本题与(2)类同, 因  $u_n = \frac{1}{3n+1} + \left( \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \right) > \frac{1}{3n+1} > \frac{1}{9n}$ , 对  $\epsilon_0 = \frac{1}{9}$ , 不论  $n$  取什么正整数, 取  $p = n$  时, 就有  $|s_{n+p} - s_n| > \frac{1}{9}$ . 因此该级数发散.

## 习题 12-2

## 常数项级数的审敛法

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的收敛性:

(1)  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)} + \cdots$ ;

(2)  $1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$ ;

(3)  $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \cdots$ ;

(4)  $\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2^2} + \sin \frac{\pi}{2^3} + \cdots + \sin \frac{\pi}{2^n} + \cdots$ ;

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a > 0).$$

解 (1) 方法一:  $u_n = \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} (n=1, 2, \dots)$ , 由于级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 故各项乘以  $\frac{1}{2}$  后的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$  也发散, 由比较审敛法知原级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$  发散.

方法二: 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 故由极限形式的比较审敛法知原级数发散.

(2)  $u_n = \frac{1+n}{1+n^2} > \frac{1+n}{n+n^2} = \frac{1}{n}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 由比较审敛法知原级数发散.

(3) 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}} = 1$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 由极限形式的比较审敛法知原级数收敛.

(4) 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} = \pi$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  收敛, 故由极限形式的比较审敛法知原级数收敛.

(5) 当  $0 < a \leq 1$  时,  $\frac{1}{1+a^n} \geq \frac{1}{2}$ , 一般项不趋于零, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$  发散; 当  $a > 1$  时,  $\frac{1}{1+a^n} < \frac{1}{a^n}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$  收敛, 故由比较审敛法知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$  收敛.

2. 用比值审敛法判定下列级数的收敛性:

$$(1) \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{3^3}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{3^n}{n \cdot 2^n} + \dots; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

解 (1) 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \bigg/ \frac{3^n}{n \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{3}{2} > 1$ , 故级数发散.

(2) 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \bigg/ \frac{n^2}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{3} < 1$ , 故级数收敛.

(3) 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \bigg/ \frac{2^n n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left( \frac{n}{1+n} \right)^n = \frac{2}{e} < 1$ , 故级数收敛.

(4) 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \tan \frac{\pi}{2^{n+2}} \bigg/ n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$   

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$
, 故级数收敛.

3. 用根值审敛法判定下列级数的收敛性:

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n$ ; (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$ ; (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}$ ;  
 (4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{b}{a_n} \right)^n$ , 其中  $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$ ,  $a_n, b, a$  均为正数.

解 (1) 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$ , 故级数收敛.

(2) 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$ , 故级数收敛.

(3) 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{3n-1} \right)^{\frac{2n-1}{n}} = \left( \frac{1}{3} \right)^2 < 1$ , 故级数收敛.

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{a_n} = \frac{b}{a}$ ,

当  $b < a$  时, 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$ , 故级数收敛;

当  $b > a$  时, 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$ , 故级数发散;

当  $b = a$  时, 级数的收敛性不能确定 (例如,  $b = 1, a_n = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{b}{a_n} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$  发散; 又如,  $b = 1, a_n = n^{\frac{2}{n}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{b}{a_n} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛).

4. 判定下列级数的收敛性:

(1)  $\frac{3}{4} + 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots + n\left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots$ ;

(2)  $\frac{1^4}{1!} + \frac{2^4}{2!} + \frac{3^4}{3!} + \cdots + \frac{n^4}{n!} + \cdots$ ;

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$ ;



$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n};$$

$$(5) \sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \cdots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \cdots;$$

$$(6) \frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a+b} + \cdots + \frac{1}{na+b} + \cdots (a > 0, b > 0).$$

解 (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} < 1$ , 由比值审敛法知级数收敛.

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \cdot \frac{1}{n+1} = 0 < 1$ , 由比值审敛法知级数收敛.

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n(n+2)} \bigg/ \frac{1}{n} = 1$ , 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 由极限形式的比较审敛法知原级数发散.

(4) 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n} \bigg/ \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{3^n}}{\frac{\pi}{3^n}} = \pi$ , 而几何级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$  收敛,

故由极限形式的比较审敛法知原级数收敛.

(5) 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \neq 0$ , 故级数发散.

(6) 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{na+b} \bigg/ \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a + \frac{b}{n}} = \frac{1}{a}$ , 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 故由极限形式的比较极限审敛法知原级数发散.

式的比较极限审敛法知原级数发散.

5. 判定下列级数是否收敛? 如果是收敛的, 是绝对收敛还是条件收敛?

$$(1) 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}};$$

$$(3) \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^4} + \cdots;$$

$$(4) \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}.$$

解 (1)  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{1}{2}}}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$  是发散的; 又  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  是交错级数, 满足  $|u_n| > |u_{n+1}|$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , 故由莱布尼茨定理知原级数收敛且条

件收敛.

(2) 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} < 1$ , 由比值审敛法知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 故原级数绝对收敛.

(3)  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3 \cdot 2^n}$ , 因  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^n}$  是公比  $q = \frac{1}{2}$  ( $|q| < 1$ ) 的等比级数, 故收敛, 从而原级数绝对收敛.

(4)  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$ ,  $|u_n| = \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$  是发散的, 故由比较审敛法知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散, 又  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  是交错级数, 满足  $|u_n| > |u_{n+1}|$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , 故由莱布尼茨定理知原级数收敛且条件收敛.

(5)  $u_n = \frac{(-1)^{n+1} 2^{n^2}}{n!}$ ,  $|u_n| = \frac{2^n \cdot 2^n \cdots 2^n}{1 \cdot 2 \cdots n}$ , 由于  $2^n > k$  ( $k = 1, 2, \cdots, n$ ), 故  $|u_n| > 1$ , 即原级数的一般项  $u_n$  随  $n$  增大而不趋于零, 故该级数发散.

### 习题 12-3

### 幂级数

1. 求下列幂级数的收敛区间:

(1)  $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots$ ;

(2)  $1 - x + \frac{x^2}{2^2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n^2} + \cdots$ ;

(3)  $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{x^n}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} + \cdots$ ;

(4)  $\frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 3^3} + \cdots + \frac{x^n}{n \cdot 3^n} + \cdots$ ;

(5)  $\frac{2}{2}x + \frac{2^2}{5}x^2 + \frac{2^3}{10}x^3 + \cdots + \frac{2^n}{n^2 + 1}x^n + \cdots$ ;

(6)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ;

(7)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ ;

(8)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$ .

解 (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ , 故收敛半径为 1, 收敛区间是

$(-1, 1)$ .

(2)  $n \geq 1$  起,  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$ , 故收敛半径为 1, 收敛区间为  $(-1, 1)$ .

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$ , 故收敛半径为  $+\infty$ , 收敛区间是  $(-\infty, +\infty)$ .

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{3}$ , 故收敛半径为 3, 收敛区间为  $(-3, 3)$ .

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = 2$ , 故收敛半径为  $\frac{1}{2}$ , 收敛区间为  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ .

(6) 这是缺(偶次幂)项的级数, 把  $(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$  视为数项级数的一般项  $u_n$ , 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} |x|^2 = |x|^2,$$

当  $|x| < 1$  时, 级数绝对收敛; 当  $|x| > 1$  时, 因一般项  $u_n \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 级数发散, 故原级数收敛半径为 1, 收敛区间为  $(-1, 1)$ .

(7) 这是缺(奇次幂)项的级数.

方法一 与(6)类似, 将它按数项级数处理, 用比值法确定收敛半径和收敛区间.

方法二 令  $t = x^2$ , 先讨论  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} t^{n-1}$  的收敛区间.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{2},$$

故该级数的收敛半径为 2, 因此, 原级数的收敛半径为  $\sqrt{2}$ , 收敛区间为  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

(8)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$ , 故收敛半径为 1.

当  $|x-5| < 1$  时, 级数收敛; 当  $|x-5| > 1$  时, 级数发散.  
故级数的收敛区间为  $(4, 6)$ .

2. 利用逐项求导或逐项积分, 求下列级数的和函数:

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ ;

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1};$$

$$(3) x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots.$$

解 (1) 容易求出此级数的收敛半径为 1. 当  $-1 < x < 1$  时,

$$\int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^x nx^{n-1} dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

在上式两端对  $x$  求导得

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

又原级数在  $x = \pm 1$  处发散, 故它的和函数  $s(x) = \frac{1}{(1-x)^2} (-1 < x < 1)$ .

(2) 不难求出此级数的收敛半径为 1. 当  $-1 < x < 1$  时,

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} = \frac{x^4}{1-x^4},$$

在上式两端分别从 0 至  $x$  积分, 并由于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$  在  $x=0$  处收敛于 0. 故得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} &= \int_0^x \frac{x^4}{1-x^4} dx \\ &= \int_0^x \left( -1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x. \end{aligned}$$

又原级数在  $x = \pm 1$  处均发散, 故它的和函数

$$s(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x \quad (-1 < x < 1).$$

(3) 记级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ , 其收敛半径为 1. 当  $-1 < x < 1$  时,

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2},$$

在上式两端分别从 0 至  $x$  积分, 并注意到  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$  在  $x=0$  处收敛于 0,

故得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \int_0^x \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

又原级数在  $x = \pm 1$  处均发散, 故它的和函数

$$s(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1).$$

## 习题 12-4

## 函数展开成幂级数

1. 求函数  $f(x) = \cos x$  的泰勒级数, 并验证它在整个数轴上收敛于这个函数.

解 在定点  $x_0$  处, 因

$$f^{(n)}(x_0) = \cos \left( x_0 + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

故  $f(x)$  的泰勒级数为

$$\begin{aligned} \cos x_0 + \cos \left( x_0 + \frac{\pi}{2} \right) (x - x_0) + \frac{\cos \left( x_0 + \pi \right)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \\ \frac{\cos \left( x_0 + \frac{n\pi}{2} \right)}{n!} (x - x_0)^n + \dots \end{aligned}$$

因为对任意的  $x \in (-\infty, +\infty)$ ,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\cos \left( \xi + \frac{n+1}{2}\pi \right)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

(其中  $\xi$  介于  $x_0$  与  $x$  之间), 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ , 于是得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

所以在整个数轴上, 有

$$\begin{aligned} f(x) = \cos x = \cos x_0 + \cos \left( x_0 + \frac{\pi}{2} \right) (x - x_0) + \frac{\cos \left( x_0 + \pi \right)}{2!} (x - x_0)^2 + \\ \dots + \frac{\cos \left( x_0 + \frac{n\pi}{2} \right)}{n!} (x - x_0)^n + \dots \end{aligned}$$

2. 将下列函数展开成  $x$  的幂级数, 并求展开式成立的区间:

$$(1) \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad (2) \ln(a+x) \quad (a > 0);$$

$$(3) a^x; \quad (4) \sin^2 x;$$

$$(5) (1+x)\ln(1+x); \quad (6) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

解 (1) 由于  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty)$  故

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n, x \in (-\infty, +\infty).$$

于是

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, x \in (-\infty, +\infty).$$

(2)  $\ln(a+x) = \ln a + \ln\left(1 + \frac{x}{a}\right)$ , 利用

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, +1],$$

得

$$\ln(a+x) = \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{a}\right)^n, \quad x \in (-a, +a].$$

(3) 利用  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty)$ , 得

$$a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n, x \in (-\infty, +\infty).$$

(4) 方法一 利用

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, x \in (-\infty, +\infty)$$

得  $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$   
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2x)^{2n}}{2(2n)!}, x \in (-\infty, +\infty).$

方法二  $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}, x \in (-\infty, +\infty),$$

将上式两端从 0 至  $x$  积分并逐项积分, 得

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \int_0^x (\sin^2 x)' dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2x)^{2n-1}}{(2n-1)!} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

(5) 方法一 因为

$$[(1+x)\ln(1+x)]' = \ln(1+x) + 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, x \in (-1, 1).$$

将上式两端从 0 至  $x$  积分并逐项积分得

$$\begin{aligned} (1+x)\ln(1+x) &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n+1}}{n(n+1)} \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n-1)n}, x \in (-1, 1), \end{aligned}$$

又在  $x=1$  处,上式右端的幂级数收敛,且函数  $(1+x)\ln(1+x)$  连续,故

$$(1+x)\ln(1+x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}, x \in (-1, 1].$$

**方法二** 利用  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, x \in (-1, 1]$ , 得

$$\begin{aligned}(1+x)\ln(1+x) &= \ln(1+x) + x\ln(1+x) \\&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \\&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{n+1}}{n} \\&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n-1} \\&= x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{(-1)^n}{n-1} \right] x^n \\&= x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}, x \in (-1, 1].\end{aligned}$$

(6) **方法一** 利用  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots, x \in [-1, 1]$ ,

并因为  $\int_0^x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} - 1$ , 以  $x^2$  替换上面幂级数中的  $x$ , 得

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \sqrt{1+x^2} - 1 \\&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 - \dots + \\&\quad (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} x^{2n} + \dots\end{aligned}$$

在  $(-1, 1)$  内将上式两端对  $x$  求导, 得

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^5 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2)} x^{2n-1} + \dots \\&= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2)} x^{2n-1} \\&= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}, x \in (-1, 1).\end{aligned}$$

在  $x=\pm 1$  处上式右端的级数均收敛且函数  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  连续, 故

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}, x \in [-1, 1].$$

方法二 将  $x^2$  替换展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^n \quad (x \in (-1, 1])$$

中的  $x$ , 得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^{2n}, \quad x \in [-1, 1],$$

从而得

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^{2n+1} \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

3. 将下列函数展开成  $(x-1)$  的幂级数, 并求展开式成立的区间:

(1)  $\sqrt{x^3}$ ; (2)  $\lg x$ .

解 (1) 当  $m > 0$  时, 因

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \quad x \in [-1, 1],$$

而  $\sqrt{x^3} = [1 + (x-1)]^{\frac{3}{2}},$

在以上二项展开式中取  $m = \frac{3}{2}$ , 并用  $(x-1)$  替换其中的  $x$ , 得

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3} &= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - 1\right) (x-1)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{3}{2} - n + 1\right) (x-1)^n + \cdots \\ &= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot (-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+2} (n+2)!} (x-1)^{n+2} \\ &= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{3}{(n+1)(n+2)2^n} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n+2}, \quad x \in [0, 2]. \end{aligned}$$

(2)  $\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \ln[1 + (x-1)]$ , 利用

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1],$$

将上式中的  $x$  换成  $(x-1)$ , 得

$$\lg x = \frac{1}{\ln 10} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}, \quad x \in (0, 2].$$

4. 将函数  $f(x) = \cos x$  展开成  $\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  的幂级数.



解  $\cos x = \cos \left[ \left( x + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{\pi}{3} \right] = \frac{1}{2} \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right).$

将  $x + \frac{\pi}{3}$  替换以下两式

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

中的  $x$ , 得

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left( x + \frac{\pi}{3} \right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left( x + \frac{\pi}{3} \right)^{2n+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{1}{(2n)!} \left( x + \frac{\pi}{3} \right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!} \left( x + \frac{\pi}{3} \right)^{2n+1} \right], x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

5. 将函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  展开成  $(x-3)$  的幂级数.

解 利用  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1)$  得

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{3+x-3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-3}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x-3}{3}\right)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-3}{3}\right)^n, \frac{3-x}{3} \in (-1, 1), \end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (x-3)^n, x \in (0, 6).$$

6. 将函数  $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$  展开成  $(x+4)$  的幂级数.

解  $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2},$

其中

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{-3+(x+4)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x+4}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{3}\right)^n,$$

$\frac{x+4}{3} \in (-1, 1)$  即  $x \in (-7, -1);$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{-2+(x+4)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x+4}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{2}\right)^n,$$

$\frac{x+4}{2} \in (-1, 1)$  即  $x \in (-6, -2)$ . 于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+3x+2} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{2}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) (x+4)^n,\end{aligned}$$

$x \in (-7, -1) \cap (-6, -2) = (-6, -2)$ .

## 习题 12-5 函数的幂级数展开式的应用

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值:

(1)  $\ln 3$  (误差不超过 0.000 1);

(2)  $\sqrt{e}$  (误差不超过 0.001);

(3)  $\sqrt[9]{522}$  (误差不超过 0.000 01);

(4)  $\cos 2^\circ$  (误差不超过 0.000 1).

解 (1)  $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots\right), x \in (-1, 1)$ .

令  $\frac{1+x}{1-x} = 3$ , 可得  $x = \frac{1}{2}$ . 从而

$$\ln 3 = \ln \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}} + \cdots\right).$$

$$\begin{aligned}|r_n| &= 2\left(\frac{1}{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3)2^{2n+3}} + \cdots\right) \\ &= \frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}} \left(1 + \frac{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}}{(2n+3) \cdot 2^{2n+3}} + \frac{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}}{(2n+5) \cdot 2^{2n+5}} + \cdots\right) \\ &< \frac{2}{(2n+1) \cdot 2^{2n+1}} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right) \\ &= \frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3(2n+1)2^{2n-2}},\end{aligned}$$

$$|r_5| < \frac{1}{3 \cdot 11 \cdot 2^8} \approx 0.000 12,$$

$$|r_6| < \frac{1}{3 \cdot 13 \cdot 2^{10}} \approx 0.000 03 < 10^{-4},$$

故取  $n=6$ , 则

$\ln 3 \approx 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \cdots + \frac{1}{11 \cdot 2^{11}}\right)$ , 考虑到舍入误差, 计算时应取五位小数, 从而得  $\ln 3 \approx 1.0986$ .

$$(2) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty).$$

令  $x = \frac{1}{2}$ , 得

$$\begin{aligned}\sqrt{e} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} + \cdots + \frac{1}{n! 2^n} + \cdots \\ r_n &= \frac{1}{(n+1)! 2^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)! 2^{n+2}} + \cdots \\ &= \frac{1}{(n+1)! 2^{n+1}} \left[ 1 + \frac{1}{(n+2) \cdot 2} + \frac{1}{(n+2)(n+3) \cdot 2^2} + \cdots \right] \\ &< \frac{1}{(n+1)! 2^{n+1}} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)! 2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{(n+1)! 2^n},\end{aligned}$$

$$r_4 < \frac{1}{5! 2^4} \approx 0.0005 < 10^{-3},$$

故取  $n=4$ , 计算时取四位小数可得

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2! 2^2} + \frac{1}{3! 2^3} + \frac{1}{4! 2^4} \approx 1.648.$$

$$(3) \quad \sqrt[9]{522} = \sqrt[9]{2^9 + 10} = 2\left(1 + \frac{10}{2^9}\right)^{\frac{1}{9}}, \text{ 因}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \\ &\quad \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1).\end{aligned}$$

$$\text{故 } \sqrt[9]{522} = 2\left(1 + \frac{10}{2^9}\right)^{\frac{1}{9}}$$

$$\begin{aligned}&= 2\left[1 + \frac{1}{9} \cdot \frac{10}{2^9} + \frac{\frac{1}{9}(\frac{1}{9}-1)}{2!} \cdot \frac{10^2}{2^{18}} + \cdots + \right. \\ &\quad \left. \frac{\frac{1}{9}(\frac{1}{9}-1) \cdots (\frac{1}{9}-n+1)}{n!} \cdot \frac{10^n}{2^{9n}} + \cdots\right] \\ &= 2 \cdot \left[1 + \frac{1}{9} \cdot \frac{10}{2^9} - \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{8}{9}}{2!} \cdot \frac{10^2}{2^{18}} + \cdots\right]\end{aligned}$$

$$= 2 + \frac{2}{9} \cdot \frac{10}{2^9} - \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10^2}{2^{18}} + \dots$$

上式右端从第 2 项起为一交错级数, 故有

$$|r_3| \leq u_4 = \frac{8 \cdot 17}{3 \cdot 9^3} \cdot \frac{10^3}{2^{27}} < 10^{-6},$$

取 3 项, 并在计算时取六位小数, 可得

$$\sqrt[9]{522} \approx 2 + \frac{2}{9} \cdot \frac{10}{2^9} - \frac{8}{9^2} \cdot \frac{10^2}{2^{18}} \approx 2.00430.$$

$$(4) \cos 2^\circ = \cos \frac{\pi}{90} = 1 - \frac{1}{2!} \left( \frac{\pi}{90} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left( \frac{\pi}{90} \right)^4 - \dots,$$

$$|r_2| \leq u_3 = \frac{1}{4!} \left( \frac{\pi}{90} \right)^4 \approx 10^{-8},$$

故取 2 项并在计算时取五位小数, 可得

$$\cos 2^\circ \approx 1 - \frac{1}{2!} \left( \frac{\pi}{90} \right)^2 \approx 0.9994.$$

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值:

$$(1) \int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx \text{ (误差不超过 } 0.0001);$$

$$(2) \int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx \text{ (误差不超过 } 0.001).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx &= \int_0^{0.5} (1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \dots + (-1)^n x^{4n} + \dots) dx \\ &= \left( x - \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{9} x^9 - \frac{1}{13} x^{13} + \dots \right) \Big|_0^{0.5} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} - \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2^{13}} + \dots, \end{aligned}$$

上式右端为一交错级数, 有

$$|r_3| \leq u_4 = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2^{13}} \approx 0.000009 < 10^{-4},$$

故取 3 项, 并在计算时取五位小数, 可得

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^4} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} \approx 0.4940.$$

$$(2) \text{ 因 } \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots (-1 < x < 1),$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx &= \int_0^{0.5} \left( 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} + \dots \right) dx \\ &= \left( x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{25} - \frac{x^7}{49} + \dots \right) \Big|_0^{0.5} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{2^7} + \dots,$$

由于  $|r_3| \leq u_4 = \frac{1}{49} \cdot \frac{1}{2^7} \approx 0.0002 < 10^{-3}$ ,

所以取 3 项,并在计算时取四位小数,可得

$$\begin{aligned} \int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx &\approx \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2^5} \\ &\approx 0.4874 \approx 0.487. \end{aligned}$$

3. 试用幂级数求下列各微分方程的解:

(1)  $y' - xy - x = 1$ ;

(2)  $y'' + xy' + y = 0$ ;

(3)  $(1-x)y' = x^2 - y$ .

解 (1) 设方程的解为  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$  ( $a_0$  为任意常数),代入方程,则有如下竖式(注意对齐同次幂项)

$$\begin{array}{r} y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + (n+1)a_{n+1}x^n + \dots \\ -xy = \quad -a_0x - a_1x^2 - \dots - a_{n-1}x^n - \dots \\ \hline -x = \quad -x \end{array}$$

$$1 = a_1 + (2a_2 - a_0 - 1)x + (3a_3 - a_1)x^2 + \dots + [(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}]x^n + \dots$$

比较系数可得

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{a_0 + 1}{2},$$

$$a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{a_0 + 1}{2 \times 4},$$

$$a_5 = \frac{a_3}{5} = \frac{1}{3 \times 5}, \quad a_6 = \frac{a_4}{6} = \frac{a_0 + 1}{2 \times 4 \times 6},$$

...

$$a_{2n-1} = \frac{1}{3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}, \quad a_{2n} = \frac{a_0 + 1}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n} = \frac{a_0 + 1}{n! 2^n}.$$

不难求出  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}x^{2n-1}$  与  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$  的收敛域都是  $(-\infty, +\infty)$ ,故

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} + (a_0 + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n! 2^n} - 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} + (a_0 + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n - 1. \end{aligned}$$

由于  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = e^{\frac{x^2}{2}}$ , 记  $a_0 + 1 = C, 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) = (2n-1)!!$ , 则

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!!} x^{2n-1} - 1, x \in (-\infty, +\infty).$$

(2) 设  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  是方程的解, 其中  $a_0, a_1$  是任意常数, 则

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n,$$

代入方程  $y'' + xy' + y = 0$ , 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + n a_n + a_n] x^n = 0.$$

故必有

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_n = 0,$$

即

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

可见, 当  $n = 2(k-1)$  时,

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \left(-\frac{1}{2k}\right) a_{2k-2} = \left(-\frac{1}{2k}\right) \left(-\frac{1}{2k-2}\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}\right) a_0 \\ &= \frac{a_0 (-1)^k}{k! 2^k}. \end{aligned}$$

当  $n = 2k-1$  时,

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \left(-\frac{1}{2k+1}\right) a_{2k-1} = \left(-\frac{1}{2k+1}\right) \left(-\frac{1}{2k-1}\right) \cdots \left(-\frac{1}{3}\right) a_1 \\ &= \frac{a_1 (-1)^k}{(2k+1)!!}. \end{aligned}$$

由于  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$  与  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$  的收敛域均为  $(-\infty, +\infty)$ , 故

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0 (-1)^n}{n! 2^n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1 (-1)^n}{(2n+1)!!} x^{2n+1}, \end{aligned}$$

即

$$y = a_0 e^{-\frac{x^2}{2}} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!} x^{2n+1}, x \in (-\infty, +\infty).$$

(3) 设  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  是方程的解, 代入方程, 得

$$(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x^2 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^2,$$

将上式左边第一个级数写成  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ , 则有

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} + (1-n) a_n] x^n = x^2.$$

比较系数, 得

$$a_1 + a_0 = 0, \quad 2a_2 = 0, \quad 3a_3 - a_2 = 1,$$

$$(n+1)a_{n+1} + (1-n)a_n = 0 \quad (n \geq 3).$$

即

$$a_1 = a_0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1} a_n \quad (n \geq 3),$$

或写成

$$a_n = \frac{n-2}{n} a_{n-1} = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdots \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{n(n-1)} \quad (n \geq 4).$$

$$\text{于是 } y = a_0 - a_0 x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{6} x^4 + \frac{1}{10} x^5 + \cdots + \frac{2}{n(n-1)} x^n + \cdots,$$

$$\text{或写成 } y = a_0(1-x) + x^3 \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{6} x + \frac{1}{10} x^2 + \cdots + \frac{2}{(n+2)(n+3)} x^n + \cdots \right].$$

4. 试用幂级数求下列方程满足所给初始条件的特解:

$$(1) y' = y^2 + x^3, y|_{x=0} = \frac{1}{2};$$

$$(2) (1-x)y' + y = 1+x, y|_{x=0} = 0.$$

解 (1) 因  $y|_{x=0} = \frac{1}{2}$ , 故设方程的特解为  $y = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ , 则

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

代入方程, 有

$$\begin{aligned} a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n &= x^3 + \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right)^2 \\ &= x^3 + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right)^2 \\ &= x^3 + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + [a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + (a_2^2 + \\ &\quad 2a_1 a_3) x^4 + \left( \sum_{i+j=n} a_i a_j \right) x^n + \cdots]. \end{aligned}$$

即

$$a_1 + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2 - a_1^2)x^2 + (4a_4 - a_3 - 2a_1 a_2)x^3$$

$$+\cdots + [(n+1)a_{n+1} - a_n - \sum_{i+j=n} a_i a_j] x^n + \cdots = \frac{1}{4} + x^3.$$

比较系数, 得  $a_1 = \frac{1}{4}, 2a_2 - a_1 = 0, 3a_3 - a_2 - a_1^2 = 0, 4a_4 - a_3 - 2a_1 a_2 = 1,$

$$\cdots, (n+1)a_{n+1} - a_n - \sum_{i+j=n} a_i a_j = 0 \quad (n \geq 4).$$

依次解得  $a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{1}{8}, a_3 = \frac{1}{16}, a_4 = \frac{9}{32}, \cdots$

故  $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \cdots$

(2) 因  $y|_{x=0} = 0$ , 故设  $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  是方程的特解, 则  $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ , 代入方程, 有

$$(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1+x,$$

即  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1+x,$

或写成

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} + (1-n)a_n] x^n = 1+x.$$

比较系数, 得  $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1} a_n (n \geq 2)$ , 或写成

$$a_n = \frac{n-2}{n} a_{n-2} = \frac{(n-2)(n-3)\cdots 1}{n(n-1)\cdots 3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n(n-1)} \quad (n \geq 3).$$

故  $y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n(n-1)}x^n + \cdots$

5. 利用欧拉公式将函数  $e^x \cos x$  展开成  $x$  的幂级数.

解 由欧拉公式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  知

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}),$$

故

$$e^x \cos x = e^x \cdot \operatorname{Re}(e^{ix}) = \operatorname{Re}(e^x \cdot e^{ix}) = \operatorname{Re}[e^{(1+i)x}].$$

因为

$$\begin{aligned} e^{(1+i)x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (1+i)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) 2^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty), \end{aligned}$$

所以

$$e^x \cos x = \operatorname{Re}[e^{(1+i)x}]$$



$$= \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{4} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty).$$

## 习题 12-6

## 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质

1. 已知函数序列  $S_n(x) = \sin \frac{x}{n} (n = 1, 2, 3, \dots)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上收敛于 0.

(1) 问  $N(\epsilon, x)$  取多大, 能使当  $n > N$  时,  $S_n(x)$  与其极限之差的绝对值小于正数  $\epsilon$ ;

(2) 证明  $S_n(x)$  在任一有限区间  $[a, b]$  上一致收敛.

解 (1) 由于  $|S_n(x) - 0| = \left| \sin \frac{x}{n} \right| \leq \frac{|x|}{n}$ , 因此对于正数  $\epsilon$ , 取  $N(\epsilon, x) \geq \frac{|x|}{\epsilon}$ , 则当  $n > N$  时, 就有

$$|S_n(x) - 0| \leq \frac{|x|}{n} < \epsilon.$$

证 (2) 记  $M = \max\{|a|, |b|\}$ , 则  $\forall x \in [a, b], |x| \leq M$ , 于是

$$|S_n(x) - 0| \leq \frac{|x|}{n} \leq \frac{M}{n}.$$

故  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $N = \left[ \frac{M}{\epsilon} \right] + 1$ , 当  $n > N$  时, 对一切  $x \in [a, b]$  都有

$$|S_n(x) - 0| \leq \frac{|x|}{n} < \frac{M}{N} < \epsilon,$$

即  $S_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛于 0.

2. 已知级数  $x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$  在  $(-\infty, +\infty)$  上收敛.

(1) 求出该级数的和;

(2) 问  $N(\epsilon, x)$  取多大, 能使当  $n > N$  时, 级数的余项  $r_n$  的绝对值小于正数  $\epsilon$ ;

(3) 分别讨论级数在区间  $[0, 1], \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$  上的一致收敛性.

解 (1) 设该级数的和函数为  $s(x)$ , 当  $x=0$  时,  $s(0)=0$ ; 当  $x \neq 0$  时, 该级数是公比为  $\frac{1}{1+x^2}$  的等比级数, 且  $\frac{1}{1+x^2} < 1$ , 故

$$s(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

于是

$$s(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$(2) r_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}} + \cdots \\ = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \left[ 1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} + \cdots \right].$$

当  $x=0$  时,  $r_n(x) = 0, \forall \varepsilon > 0$ , 取  $N=1$ , 则当  $n > N$  时, 就有

$$|r_n(x)| < \varepsilon;$$

当  $x \neq 0$  时,  $r_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}, \forall \varepsilon > 0$ , 取

$$N = \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln(1+x^2)} \right\rceil + 1,$$

则  $|r_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} < \frac{1}{(1+x^2)^{N-1}} = \varepsilon.$

(3) 该级数的各项  $u_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} (n = 0, 1, 2, \cdots)$  在区间  $[0, 1]$  上是连

续的, 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  在  $[0, 1]$  上一致收敛, 则由定理 1 知, 其和函数  $s(x)$  在  $[0, 1]$  上连续. 今  $s(x)$  在  $[0, 1]$  有间断点  $x=0$ , 由此推知该级数在  $[0, 1]$  上不一致收敛.

在区间  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  上, 因为

$$|r_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \leq \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{n-1}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1},$$

所以,  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = [\log_{\frac{4}{5}} \varepsilon] + 1$ , 当  $n > N$  时, 对一切  $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , 有

$$|r_n(x)| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} < \left(\frac{4}{5}\right)^{N-1} = \varepsilon.$$

即级数在  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  上一致收敛.

3. 按定义讨论下列级数在所给区间上的一致收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, -\infty < x < +\infty;$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n, 0 < x < 1.$$

解 (1) 此级数为交错级数, 且满足莱布尼茨定理的条件.

$$\forall x \in (-\infty, +\infty),$$

$$|r_n(x)| \leq \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} < \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1+nx^2+\cdots+x^{2n}} < \frac{1}{n},$$

故  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right]$ , 当  $n > N$  时, 对一切  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 有

$$|r_n(x)| < \varepsilon,$$

即该级数在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛.

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n - x^{n+1}), \text{ 其部分和函数}$$

$$s_n(x) = (1-x) + (x-x^2) + \cdots + (x^n - x^{n+1}) = 1 - x^{n+1},$$

$$\text{有和函数 } s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{n+1}) = 1, x \in (0, 1).$$

$$\text{且 } |r_n(x)| = |s_n(x) - s(x)| = x^{n+1}, x \in (0, 1).$$

取一列  $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n+1}} (n=1, 2, \cdots), x_n \in (0, 1)$ . 于是对  $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ , 不论  $n$  多么大, 总有  $x_n \in (0, 1)$ , 使得

$$|r_n(x_n)| = \left[ \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n+1}} \right]^{n+1} = \frac{1}{3} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0.$$

因此, 该级数在开区间  $(0, 1)$  内不一致收敛.

4. 利用魏尔斯特拉斯判别法证明下列级数在所给区间上的一致收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}, -\infty < x < +\infty;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}, -\infty < x < +\infty;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, 0 \leq x < +\infty;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n!}, |x| < 10;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1 - e^{-nx})}{n^2 + x^2}, 0 \leq x < +\infty.$$

证 (1)  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ , 因为  $|\cos nx| \leq 1$ , 所以

$$\left| \frac{\cos nx}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n},$$

而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  收敛, 从而原级数在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛.

(2)  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ , 因为  $|\sin nx| \leq 1$ , 所以

$$\left| \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}} \right| \leq \frac{1}{(n^4+x^4)^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}},$$

而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$  收敛, 从而原级数在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛.

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 \cdot e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}, \text{ 由于当 } x \in [0, +\infty) \text{ 时,}$$

$$e^{nx} = 1 + nx + \frac{1}{2!}(nx)^2 + \frac{1}{3!}(nx)^3 + \cdots > \frac{1}{2!}(nx)^2 = \frac{n^2 x^2}{2},$$

故 
$$\left| \frac{x^2}{e^{nx}} \right| < \frac{2}{n^2},$$

而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$  收敛, 故原级数在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

$$(4) \forall x \in (-10, 10), \left| \frac{e^{-nx}}{n!} \right| < \frac{(e^{10})^n}{n!},$$

而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{10})^n}{n!}$  收敛 (收敛于  $e^{e^{10}} - 1$ ), 故原级数在  $(-10, 10)$  上一致收敛.

$$(5) \forall x \in [0, +\infty), \text{ 由于 } 0 < e^{-nx} < 1, \text{ 故}$$

$$\left| \frac{(-1)^n (1 - e^{-nx})}{n^2 + x^2} \right| = \frac{1 - e^{-nx}}{n^2 + x^2} < \frac{1}{n^2},$$

而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 从而原级数在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

## 习题 12-7 傅里叶级数

1. 下列周期函数  $f(x)$  的周期为  $2\pi$ , 试将  $f(x)$  展开成傅里叶级数, 如果  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi)$  上的表达式为:

$$(1) f(x) = 3x^2 + 1 (-\pi \leq x < \pi);$$

$$(2) f(x) = e^{2x} (-\pi \leq x < \pi);$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} bx, & -\pi \leq x < 0, \\ ax, & 0 \leq x < \pi (a, b \text{ 为常数, 且 } a > b > 0). \end{cases}$$

解 (1)  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 + 1) dx = 2(\pi^2 + 1);$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2 + 1) \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{n} (3x^2 + 1) \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} 6x \sin nx dx \Big]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{6}{n^2\pi} \left( x \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \right) \\
 &= \frac{12}{n^2} (-1)^n - \frac{6}{n^3\pi} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{(-1)^n 12}{n^2} (n=1, 2, \dots);
 \end{aligned}$$

由于  $(3x^2+1)\sin nx$  是奇函数, 故

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3x^2+1)\sin nx dx = 0.$$

因为  $f(x)$  满足收敛定理的条件且在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 故

$$f(x) = \pi^2 + 1 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, x \in (-\infty, +\infty).$$

$$(2) a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} dx = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2\pi};$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \cos nx dx = \frac{1}{2\pi} \left( e^{2x} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \cdot n \sin nx dx \right) \\
 &= \frac{(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{2\pi} + \frac{n}{4\pi} \left( e^{2x} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} n \cdot \cos nx dx \right) \\
 &= \frac{(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{2\pi} - \frac{n^2}{4} a_n,
 \end{aligned}$$

故

$$a_n = \frac{2(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{(n^2 + 4)\pi} (n=1, 2, \dots);$$

用分部积分法得

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} \sin nx dx = -\frac{n}{2} a_n = -\frac{n(-1)^n (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{(n^2 + 4)\pi} (n=1, 2, \dots).$$

$f(x)$  满足收敛定理的条件, 而在  $x = (2k+1)\pi$  处不连续 ( $k \in \mathbf{Z}$ ), 故

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{\pi} \left[ \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 4} (2\cos nx - n\sin nx) \right], \\
 &\quad x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}.
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 bx dx + \int_0^{\pi} ax dx \right] = \frac{\pi}{2} (a+b);$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 bx \cos nx dx + \int_0^{\pi} ax \cos nx dx \right].$$

在上式右端第一个积分中令  $x = -t$ ,

$$\int_{-\pi}^0 bx \cos nx dx = \int_0^{\pi} -bt \cos nt dt = \int_0^{\pi} -tx \cos nx dx,$$

故

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (a-b)x \cos nx \, dx = \frac{a-b}{n\pi} \left( x \sin nx \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin nx \, dx \right) \\ &= \frac{a-b}{n^2\pi} (\cos \pi - 1) = \frac{b-a}{n^2\pi} [1 - (-1)^n] \quad (n=1, 2, \dots); \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 bx \sin nx \, dx + \int_0^\pi ax \sin nx \, dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (a+b)x \sin nx \, dx = \frac{a+b}{n\pi} \left( -x \cos nx \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos nx \, dx \right) \\ &= \frac{a+b}{n\pi} \left[ (-1)^{n+1} \pi + \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^\pi \right] = \frac{a+b}{n} (-1)^{n+1} \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

$f(x)$  满足收敛定理的条件, 而在  $x = (2k+1)\pi (k \in \mathbf{Z})$  处不连续. 故

$$f(x) = \frac{\pi}{4}(a-b) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{[1 - (-1)^n](b-a)}{n^2\pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}(a+b)}{n} \sin nx \right\},$$

$$x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

2. 将下列函数  $f(x)$  展开成傅里叶级数:

$$(1) f(x) = 2\sin \frac{x}{3} \quad (-\pi \leq x \leq \pi);$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

解 (1) 设  $\varphi(x)$  是  $f(x)$  经周期延拓而得的函数,  $\varphi(x)$  在  $(-\pi, \pi)$  内连续,  $x = \pm\pi$  是  $\varphi(x)$  的间断点. 又  $\varphi(x)$  满足收敛定理的条件, 故在  $(-\pi, \pi)$  内, 它的傅里叶级数收敛于  $f(x)$ .

由于  $2\sin \frac{x}{3}$  是奇函数, 故  $a_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$ ;

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 2\sin \frac{x}{3} \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[ \cos \left( \frac{1}{3} - n \right) x - \cos \left( \frac{1}{3} + n \right) x \right] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin \left( n - \frac{1}{3} \right) \pi}{n - \frac{1}{3}} - \frac{\sin \left( n + \frac{1}{3} \right) \pi}{n + \frac{1}{3}} \right] \\ &= \frac{6}{\pi} \left[ \frac{-\cos n\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3n-1} - \frac{\cos n\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3n+1} \right] \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{n}{9n^2-1} \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

故

$$f(x) = \frac{18\sqrt{3}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{9n^2-1} \sin nx, x \in (-\pi, \pi).$$

(2) 设  $\varphi(x)$  是  $f(x)$  经周期延拓而得的函数, 它在  $(-\pi, \pi)$  内连续,  $x = \pm\pi$  是  $\varphi(x)$  的间断点. 又  $\varphi(x)$  满足收敛定理的条件, 故在  $(-\pi, \pi)$  内它的傅里叶级数收敛于  $f(x)$ .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 e^x dx + \int_0^{\pi} dx \right] = \frac{1 + \pi - e^{-\pi}}{\pi};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 e^x \cos nx dx + \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] = \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)} (n=1, 2, \dots);$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 e^x \sin nx dx + \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{-n[1 - (-1)^n e^{-\pi}]}{1+n^2} + \frac{1 - (-1)^n}{n} \right\} (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 + \pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2} \right] \cos nx + \right. \\ &\quad \left. \left[ \frac{-n + (-1)^n n e^{-\pi}}{1+n^2} + \frac{1 - (-1)^n}{n} \right] \sin nx \right\}, x \in (-\pi, \pi). \end{aligned}$$

3. 将函数  $f(x) = \cos \frac{x}{2} (-\pi \leq x \leq \pi)$  展开成傅里叶级数.

解  $f(x) = \cos \frac{x}{2}$  是偶函数, 故  $b_n = 0$  ( $n=1, 2, \dots$ ).

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ \cos \left( n - \frac{1}{2} \right) x + \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin \left( n - \frac{1}{2} \right) \pi}{n - \frac{1}{2}} + \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi}{n + \frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{-\cos n\pi}{2n-1} + \frac{\cos n\pi}{2n+1} \right) = (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \frac{4}{\pi(4n^2-1)} (n=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

因  $f(x)$  满足收敛定理的条件, 且在  $[-\pi, \pi]$  上连续, 故

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4n^2-1} \cos nx, x \in [-\pi, \pi].$$

4. 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的周期函数, 它在  $[-\pi, \pi)$  上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \\ x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi, \end{cases}$$

将  $f(x)$  展开成傅里叶级数.

解  $f(x)$  是奇函数, 故  $a_n = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ );

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\pi}{2} \sin nx \, dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \left. \frac{-x \cos nx}{n} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \, dx \right] + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin nx \, dx \\ &= \frac{-\cos \frac{n\pi}{2}}{n} + \frac{2 \sin \frac{n\pi}{2}}{\pi n^2} + \frac{\cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi}{n} \\ &= \frac{2}{n^2 \pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

因  $f(x)$  满足收敛定理的条件, 而在  $x = (2k+1)\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) 处间断, 故

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^2 \pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \sin nx, \quad x \neq (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

5. 将函数  $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 展开成正弦级数.

解 作

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, \pi], \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & x \in (-\pi, 0), \end{cases}$$

$\varphi(x)$  是  $f(x)$  的奇延拓. 令  $\Phi(x)$  是  $\varphi(x)$  的周期延拓, 则  $\Phi(x)$  满足收敛定理的条件, 而在  $x = 2k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) 处间断, 又在  $(0, \pi]$  上,  $\Phi(x) \equiv f(x)$ , 因此  $\Phi(x)$  的傅里叶级数在  $(0, \pi]$  上收敛于  $f(x)$ .

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi-x}{2} \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x-\pi}{2n} \cos nx - \frac{1}{2n^2} \sin nx \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

故



$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx, x \in (0, \pi].$$

6. 将函数  $f(x) = 2x^2 (0 \leq x \leq \pi)$  分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 (1) 展开成正弦级数.

令

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \in [0, \pi], \\ -2x^2, & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

是  $f(x)$  的奇延拓, 又  $\Phi(x)$  是  $\varphi(x)$  的周期延拓函数, 则  $\Phi(x)$  满足收敛定理的条件, 而在  $x = (2k+1)\pi (k \in \mathbb{Z})$  处间断, 又在  $[0, \pi]$  上  $\Phi(x) \equiv f(x)$ , 故它的傅里叶级数在  $[0, \pi)$  上收敛于  $f(x)$ .

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 2x^2 \sin nx \, dx \\ &= \frac{4}{\pi} \left[ \frac{-x^2}{n} \cos nx + \frac{2x}{n^2} \sin nx + \frac{2}{n^3} \cos nx \right]_0^\pi \\ &= \frac{4}{\pi} \left[ \frac{-\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n 2}{n^3} - \frac{2}{n^3} \right] \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

故

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n} \right) (-1)^n - \frac{2}{n^3} \right] \sin nx, x \in [0, \pi).$$

(2) 展开成余弦级数.

令  $\varphi(x) = 2x^2, x \in (-\pi, \pi]$  是  $f(x)$  的偶延拓, 又  $\Phi(x)$  是  $\varphi(x)$  的周期延拓函数, 则  $\Phi(x)$  满足收敛定理的条件且处处连续, 又在  $[0, \pi]$  上,  $\Phi(x) \equiv f(x)$ , 故它的傅里叶级数在  $[0, \pi]$  上收敛于  $f(x)$ .

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 2x^2 \, dx = \frac{4}{3} \pi^2;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 2x^2 \cos nx \, dx = (-1)^n \frac{8}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

故

$$f(x) = \frac{2}{3} \pi^2 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, x \in [0, \pi].$$

7. 设周期函数  $f(x)$  的周期为  $2\pi$ . 证明:

(1) 如果  $f(x-\pi) = -f(x)$ , 则  $f(x)$  的傅里叶系数  $a_0 = 0, a_{2k} = 0, b_{2k} = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ );

(2) 如果  $f(x-\pi) = f(x)$ , 则  $f(x)$  的傅里叶系数  $a_{2k+1} = 0, b_{2k+1} = 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

$$\begin{aligned}\text{证 (1)} \quad a_0 &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} -f(x-\pi) dx \right]\end{aligned}$$

在上式第二个积分中令  $x-\pi=u$ , 则

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(x) dx - \int_{-\pi}^0 f(u) du \right] = 0.$$

同理可得

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} -f(x-\pi) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx - \int_{-\pi}^0 f(u) \cos (n\pi + nu) du \right]\end{aligned}$$

及

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx dx - \int_{-\pi}^0 f(u) \sin (n\pi + nu) du \right].$$

当  $n=2k (k \in \mathbf{N}^*)$  时,  $\cos (n\pi + nu) = \cos nu$ ,  $\sin (n\pi + nu) = \sin nu$ ,  
于是有

$$\begin{aligned}a_{2k} &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(x) \cos 2kx dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos 2kx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(x) \cos 2kx dx - \int_{-\pi}^0 f(u) \cos 2ku du \right] = 0,\end{aligned}$$

及

$$b_{2k} = 0 \quad (k \in \mathbf{N}^*).$$

(2) 与(1)的做法类似,有

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx + \int_{-\pi}^0 f(u) \cos (n\pi + nu) du \right] \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(x) \sin nx dx + \int_{-\pi}^0 f(u) \sin (n\pi + nu) du \right]\end{aligned}$$

当  $n=2k+1 (k \in \mathbf{N})$  时,  $\cos (n\pi + nu) = -\cos nu$ ,

$$\sin (n\pi + nu) = -\sin nu,$$

故有

$$a_{2k+1} = 0, b_{2k+1} = 0 \quad (k \in \mathbf{N}).$$

## 习题 12-8

### 一般周期函数的傅里叶级数

1. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数(下面给出函数在一个周期内的表

达式):

$$(1) \quad f(x) = 1 - x^2 \left( -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \right);$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1; \end{cases}$$

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} 2x+1, & -3 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 3. \end{cases}$$

解 (1) 函数  $f(x)$  是半周期  $l = \frac{1}{2}$  的偶函数, 故

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$a_0 = \frac{2}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2) dx = \frac{11}{6};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2) \cos \frac{n\pi x}{\frac{1}{2}} dx = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2) \cos 2n\pi x dx \\ &= 4 \left[ \frac{1-x^2}{2n\pi} \sin 2n\pi x - \frac{2x}{4n^2\pi^2} \cos 2n\pi x + \frac{2}{8n^3\pi^3} \sin 2n\pi x \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

因  $f(x)$  满足收敛定理的条件且处处连续, 故有

$$f(x) = \frac{11}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos (2n\pi x), x \in (-\infty, +\infty).$$

(2) 函数  $f(x)$  的半周期  $l = 1$ .

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-1) dx = -\frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x dx \\ &= \int_{-1}^0 x \cos n\pi x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \cos n\pi x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos n\pi x dx \\ &= \left[ \frac{x}{n\pi} \sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[ \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{1}{n^2\pi^2} [1 - (-1)^n] + \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \dots); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x dx \\
 &= \int_{-1}^0 x \sin n\pi x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \sin n\pi x dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \sin n\pi x dx \\
 &= -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n\pi} \quad (n=1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

因  $f(x)$  满足收敛定理的条件, 其间断点为  $x = 2k, 2k + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}$ , 故有

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi^2} + \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \cos n\pi x + \frac{1}{n\pi} \left( 1 - 2\cos \frac{n\pi}{2} \right) \sin n\pi x \right\}, \\
 x &\in \mathbf{R} \setminus \{2k, 2k + \frac{1}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\}.
 \end{aligned}$$

(3) 函数  $f(x)$  的半周期  $l = 3$ .

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \left[ \int_{-3}^0 (2x+1) dx + \int_0^3 dx \right] = -1; \\
 a_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[ \int_{-3}^0 (2x+1) \cos \frac{n\pi x}{3} dx + \int_0^3 \cos \frac{n\pi x}{3} dx \right] \\
 &= \frac{6}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] \quad (n=1, 2, \dots); \\
 b_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[ \int_{-3}^0 (2x+1) \sin \frac{n\pi x}{3} dx + \int_0^3 \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right] \\
 &= \frac{6}{n\pi} (-1)^{n+1} \quad (n=1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

因  $f(x)$  满足收敛定理的条件, 其间断点为  $x = 3(2k+1), k \in \mathbf{Z}$ , 故有

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{6}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] \cos \frac{n\pi x}{3} + (-1)^{n+1} \frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \right\}, \\
 x &\in \mathbf{R} \setminus \{3(2k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\}.
 \end{aligned}$$

2. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{l}{2}, \\ l-x, & \frac{l}{2} \leq x \leq l; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = x^2 \quad (0 \leq x \leq 2).$$

解 (1) 展开成正弦级数:

将  $f(x)$  作奇延拓得  $\varphi(x)$ , 又将  $\varphi(x)$  作周期延拓得  $\Phi(x)$ , 则  $\Phi(x)$  是以  $2l$  为周期的奇函数,  $\Phi(x)$  处处连续, 又满足收敛定理的条件, 且在  $[0, l]$  上,  $\Phi(x) \equiv f(x)$ .

$$a_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots);$$

$$b_n = \frac{2}{l} \left[ \int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right],$$

在上式第二个积分中令  $l-x=t$ , 则有

$$\int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = - \int_0^{\frac{l}{2}} t \cdot \cos n\pi \sin \frac{n\pi t}{l} dt = (-1)^{n-1} \int_0^{\frac{l}{2}} t \sin \frac{n\pi t}{l} dt,$$

于是

$$b_n = \frac{2}{l} [1 + (-1)^{n-1}] \int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

当  $n=2k$  时,  $b_{2k}=0$ ; 当  $n=2k-1$  时,

$$b_{2k-1} = \frac{4}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l} dx = \frac{4l}{(2k-1)^2 \pi^2} (-1)^{k-1} \quad (k=1, 2, \dots).$$

故

$$f(x) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l}, x \in [0, l].$$

展开为余弦级数:

将  $f(x)$  作偶延拓得  $\psi(x)$ , 再将  $\psi(x)$  作周期延拓得  $\Psi(x)$ , 则  $\Psi(x)$  是以  $2l$  为周期的周期函数.  $\Psi(x)$  处处连续又满足收敛定理的条件, 且在  $[0, l]$  上  $\Psi(x) \equiv f(x)$ .

$$a_0 = \frac{2}{l} \left[ \int_0^{\frac{l}{2}} x dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) dx \right] = \frac{l}{2};$$

$$a_n = \frac{2}{l} \left[ \int_0^{\frac{l}{2}} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right],$$

在上式第二个积分中令  $l-x=t$ , 则有

$$\int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = (-1)^n \int_0^{\frac{l}{2}} t \cos \frac{n\pi t}{l} dt,$$

于是

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} [1 + (-1)^n] \int_0^{\frac{l}{2}} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} [1 + (-1)^n] \left( \frac{l}{\pi} \right)^2 \left[ \frac{\pi}{2n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2} \right]. \end{aligned}$$

当  $n=2m-1$  时,  $a_{2m-1}=0$ ; 当  $n=2m$  时,

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \frac{4l}{\pi^2} \cdot \frac{l}{(2m)^2} [(-1)^m - 1] \\ &= \begin{cases} 0, & m=2k, \\ \frac{l}{\pi^2} \cdot \frac{(-2)}{(2k-1)^2}, & m=2k-1 \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

故

$$f(x) = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{2(2k-1)\pi x}{l}, x \in [0, l].$$

(2) 展开为正弦级数:

将  $f(x)$  作奇延拓得  $\varphi(x)$ , 再将  $\varphi(x)$  作周期延拓, 得以 4 为周期的周期函数  $\Phi(x)$ , 则  $\Phi(x)$  满足收敛定理的条件, 除了间断点  $x = 2(2k+1) (k \in \mathbb{Z})$  外处处连续, 且在  $[0, 2)$  上,  $\Phi(x) \equiv f(x)$ .

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 x^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \left[ -\frac{2}{n\pi} x^2 \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 + \frac{4}{n\pi} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= (-1)^{n+1} \frac{8}{n\pi} + \frac{8}{(n\pi)^2} \left[ x \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 + \frac{16}{(n\pi)^3} \left[ \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 \\ &= (-1)^{n+1} \frac{8}{n\pi} + \frac{16}{(n\pi)^3} [(-1)^n - 1] (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

故

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3 \pi^2} [(-1)^n - 1] \right\} \sin \frac{n\pi x}{2}, x \in [0, 2).$$

展开为余弦级数:

将  $f(x)$  作偶延拓得  $\psi(x)$ , 再将  $\psi(x)$  作周期延拓, 得以 4 为周期的周期函数  $\Psi(x)$ , 则  $\Psi(x)$  处处连续又满足收敛定理的条件. 且在  $[0, 2]$  上  $\Psi(x) \equiv f(x)$ .

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 x^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2}{n\pi} \left[ x^2 \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 - \frac{4}{n\pi} \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= \frac{8}{(n\pi)^2} \left[ x \cos \frac{n\pi x}{2} - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 \\ &= (-1)^n \frac{16}{(n\pi)^2} \quad (n = 1, 2, \dots); \end{aligned}$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

故

$$f(x) = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2}, x \in [0, 2].$$

\* 3. 设  $f(x)$  是周期为 2 的周期函数, 它在  $[-1, 1)$  上的表达式为  $f(x) = e^{-x}$ . 试将  $f(x)$  展开成复数形式的傅里叶级数.

解.  $f(x)$  满足收敛定理的条件, 且除了点  $x = 2k+1 (k \in \mathbb{Z})$  外处处连续.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-x} e^{-in\pi x} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-(1+in\pi)x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+n\pi i} [e^{-(1+n\pi i)x}]_{-1}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-n\pi i}{1+(n\pi)^2} (e^{-1} \cdot e^{-n\pi i} - e \cdot e^{n\pi i}) \\
&= \frac{1-n\pi i}{1+(n\pi)^2} \frac{e \cos n\pi - e^{-1} \cos n\pi}{2} \\
&= (-1)^n \frac{e-e^{-1}}{2} \frac{1-n\pi i}{1+n^2\pi^2} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots),
\end{aligned}$$

故

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{e-e^{-1}}{2} \frac{1-n\pi i}{1+n^2\pi^2} \cdot e^{inx}, x \in \mathbf{R} \setminus \{2k+1 \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

\* 4. 设  $u(t)$  是周期为  $T$  的周期函数. 已知它的傅里叶级数的复数形式为(参阅本节例题)

$$u(t) = \frac{h\tau}{T} + \frac{h}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} e^{i\frac{2n\pi}{T}t} \quad (-\infty < t < +\infty),$$

试写出  $u(t)$  的傅里叶级数的实数形式(即三角形式).

解 由题设知  $c_n = \frac{h}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \quad (n=\pm 1, \pm 2, \dots).$

因

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \overline{c_n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

可见

$$a_n = \operatorname{Re}(2\overline{c_n}), b_n = \operatorname{Im}(2\overline{c_n}).$$

而  $c_n$  为实数, 故

$$a_n = \frac{2h}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T}, b_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

故

$$u(t) = \frac{h\tau}{T} + \frac{2h}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \cdot \cos \frac{2n\pi t}{T} \quad (-\infty < t < +\infty).$$

## 总习题十二

1. 填空

(1) 对级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  是它收敛的 \_\_\_\_\_ 条件, 不是它收敛的 \_\_\_\_\_ 条件;

(2) 部分和数列  $\{S_n\}$  有界是正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的 \_\_\_\_\_ 条件;

(3) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  必定 \_\_\_\_\_; 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  条件

收敛,则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  必定\_\_\_\_\_.

解 (1) 必要,充分; (2) 充要; (3) 收敛,发散.

2. 判定下列级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n};$$

$$(4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{10} n}; \quad (5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s} (a > 0, s > 0).$$

解 (1)  $u_n = \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$ , 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ . 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 故由极限形

式的比较审敛法知原级数发散.

(2)  $u_n = \frac{(n!)^2}{2n^2} = \frac{[(n-1)!]^2}{2} \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$ , 由于一般项不趋于零, 故级数发散.

(3)  $u_n = \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n} \leq \frac{n}{2^n} = v_n$ , 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  是收敛的 (事实上,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$ , 据比值审敛法知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$  收敛), 故由比较审敛法知原级数收敛.

(4)  $u_n = \frac{1}{\ln^{10} n}$ , 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln^{10} n} = +\infty$ , 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 故由极限

形式的比较审敛法知原级数发散.

注 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln^{10} n}$  时, 可考虑极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^{10} n}{n}$ .

因  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{10} x}{x} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10 \ln^9 x}{x} = \cdots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10!}{x} = 0$ ,

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^{10} n}{n} = 0,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln^{10} n} = +\infty.$$

(5)  $u_n = \frac{a^n}{n^s}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^s = a$ .

由比值审敛法知, 当  $a < 1$  时级数收敛, 当  $a > 1$  时级数发散.



当  $a = 1$  时, 原级数成为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ , 由  $p$ -级数的结论知, 当  $s > 1$  时级数收敛, 当  $s \leq 1$  时级数发散.

3. 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都收敛, 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$  也收敛.

证 根据题设条件知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$  收敛, 故有  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = 0$ . 由极限定义知, 存在正整数  $N$ , 当  $n \geq N$  时, 有  $u_n + v_n < 1$ , 从而

$$(u_n + v_n)^2 < u_n + v_n \quad (n \geq N),$$

故由比较审敛法知  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$  收敛.

4. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$ . 问级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  是否也收敛? 试说明理由.

解 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  不一定收敛.

当  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  是正项级数时, 在题设条件下  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  必定收敛. 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$ . 根据收敛数列的保号性知, 存在正整数  $N$ , 当  $n \geq N$  时有  $\frac{v_n}{u_n} > 0$ , 即有  $v_n > 0$ . 于是, 按正项级数的比较审敛法知  $\sum_{n=N}^{\infty} v_n$  收敛, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛.

当  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  不是正项级数时,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  可能不收敛. 例如: 若  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ ,  $v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \right] = 1$ , 然而  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散.

5. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}.$$

解 (1)  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^p}$ ,  $|u_n| = \frac{1}{n^p}$ , 当  $p > 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛; 当  $0 < p \leq 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$  是交错级数, 且满足莱布尼茨定理的条件, 因而收敛且为条件收敛; 当  $p \leq 0$  时, 由于  $u_n \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 此时级数发散. 综上所述, 当  $p > 1$  时, 级数绝对收敛, 当  $0 < p \leq 1$  时, 级数条件收敛, 当  $p \leq 0$  时, 级数发散.

(2)  $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi^{n+1}} \sin \frac{\pi}{n+1}$ ,  $|u_n| \leq \left(\frac{1}{\pi}\right)^{n+1}$ , 而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{n+1}$  收敛, 由比

较审敛法知  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 即原级数绝对收敛.

$$(3) u_n = (-1)^n \ln \frac{n+1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1, \text{ 而级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

发散, 由极限形式的比较审敛法知  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散.

而  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  是交错级数且满足莱布尼茨定理的条件, 因而收敛, 故该级数条件收敛.

$$(4) u_n = (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}},$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{e} < 1. \end{aligned}$$

由比值审敛法知  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 即原级数绝对收敛.

6. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} [2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdot \dots \cdot (2^n)^{\frac{1}{3^n}}].$$

解 (1) 由于  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}$  是级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$  的部分和, 注意到

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e,$$

故

$$\frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} < \frac{1}{3^n} e^n = \left(\frac{e}{3}\right)^n.$$

因  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n$  收敛, 故由比较审敛法知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$  收敛, 于是部分和  $s_n$  有界, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = 0.$$

$$(2) 2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdot \dots \cdot (2^n)^{\frac{1}{3^n}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{9}} \cdot 2^{\frac{2}{27}} \cdot \dots \cdot 2^{\frac{n}{3^n}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots + \frac{n}{3^n}},$$

为此,先求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{n}{3^n} \right)$ .

记

$$s_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{n}{3^n},$$

则

$$\frac{1}{3}s_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \cdots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}},$$

将以上两式相减,得

$$\frac{2}{3}s_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right) - \frac{n}{3^{n+1}},$$

即

$$s_n = \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{3^n},$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdot \cdots \cdot (2^n)^{\frac{1}{3^n}} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{8}.$$

7. 求下列幂级数的收敛区间:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{n} x^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{2n}.$$

解 (1)  $u_n = a_n x^n, a_n = \frac{3^n + 5^n}{n}$ . 因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3^{n+1} + 5^{n+1}}{3^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3 \left( \frac{3}{5} \right)^n + 5}{\left( \frac{3}{5} \right)^n + 1} = 5,$$

故收敛半径为  $R = \frac{1}{5}$ , 收敛区间为  $\left( -\frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right)$ .

(2)  $u_n = a_n x^n, a_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$ . 因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{n+2}{n+1} \right)^{(n+1)^2}}{\left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{2n+1}}{\left( 1 + \frac{1}{n^2 + 2n} \right)^{n^2}} = \frac{e^2}{e} = e,$$

故收敛半径为  $R = \frac{1}{e}$ , 收敛区间为  $(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$ .

(3) 令  $x+1=t$ , 即  $x=t-1$ , 先讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$  的收敛区间.

因  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ , 故收敛半径  $R=1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$  的收敛区间为  $(-1, 1)$ , 从而原级数的收敛区间为  $(-2, 0)$ .

(4) 令  $\frac{x^2}{2} = t$ , 原级数成为  $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$ , 由第(3)题知该级数的收敛区间为  $(-1, 1)$ . 因  $x = \pm \sqrt{2t}$ , 故原级数的收敛区间为  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

8. 求下列幂级数的和函数:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

解 (1)  $u_n(x) = \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)},$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{|x|^2}{2} = \frac{|x|^2}{2}.$$

当  $\frac{|x|^2}{2} < 1$  时, 原级数收敛; 当  $\frac{|x|^2}{2} \geq 1$  时, 因级数的一般项  $u_n(x)$

$\not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 故级数发散. 因此原级数的收敛域为  $\frac{|x|^2}{2} < 1$ , 即  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

设和函数为  $s(x)$ , 即  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)}$ , 从 0 到  $x$  积分并逐项积分:

$$\begin{aligned} \int_0^x s(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^{2n+1} = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \\ &= \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{x}{2-x^2}, x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}). \end{aligned}$$

上式两端对  $x$  求导, 得

$$s(x) = \left(\frac{x}{2-x^2}\right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}, x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

$$(2) u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} |x|^2 = |x|^2.$$

当  $|x| < 1$  时, 级数收敛; 当  $|x| > 1$  时, 因级数一般项  $u_n(x) \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ ,

故级数发散;当  $x = \pm 1$  时,级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$  是收敛的交错级数,因此原级数的收敛域为  $[-1, 1]$ . 设和函数为  $s(x)$ , 则

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, \text{ 且 } s(0) = 0.$$

在  $(-1, 1)$  内, 上式两端对  $x$  求导, 得

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}.$$

于是

$$s(x) = s(x) - s(0) = \int_0^x s'(x) dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x.$$

又由于幂级数在  $x = \pm 1$  处收敛, 且  $\arctan x$  在  $x = \pm 1$  处连续, 故

$$s(x) = \arctan x, \quad x \in [-1, 1].$$

(3) 令  $x-1=t$ , 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$  的收敛域为  $(-1, 1)$ . 记其和函数为  $\varphi(t)$ , 即有

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} nt^n = t \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} = t \left( \sum_{n=1}^{\infty} t^n \right)' \\ &= t \left( \frac{t}{1-t} \right)' = \frac{t}{(1-t)^2}, \quad t \in (-1, 1). \end{aligned}$$

于是原级数的和函数

$$s(x) = \varphi(x-1) = \frac{x-1}{(2-x)^2}, \quad x \in (0, 2).$$

$$^*(4) \quad u_n(x) = a_n x^n, \quad a_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1$ , 得幂级数的收敛半径  $R = 1$ . 当  $x = \pm 1$  时, 级

数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$  均收敛, 故幂级数的收敛域为  $[-1, 1]$ .

$$\text{设和函数为 } s(x), \text{ 即 } s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

当  $x = 0$  时,  $s(0) = 0$ ;

当  $0 < |x| < 1$  时,

$$xs(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)},$$

上式两端对  $x$  求导, 得

$$[xs(x)]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

再求导,得

$$[xs(x)]' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

注意到  $[xs(x)]'_{x=0} = 0$ , 上式两端从 0 到  $x$  积分, 得

$$[xs(x)]' = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x),$$

再积分, 得

$$xs(x) = -\int_0^x \ln(1-x) dx = (1-x)\ln(1-x) + x,$$

于是

$$s(x) = \frac{1-x}{x} \ln(1-x) + 1, x \in (-1, 0) \cup (0, 1).$$

由于幂级数在  $x = \pm 1$  处收敛, 故和函数分别在  $x = \pm 1$  处左连续与右连续,

于是  $s(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} s(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{x} \ln(1-x) + 1 = 1$ .

因此

$$s(x) = \begin{cases} 1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \ln(1-x), & x \in [-1, 0) \cup (0, 1), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

9. 求下列数项级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}; \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}.$$

解 (1) 利用  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, x \in (-\infty, +\infty)$ , 取  $x=1$ , 有  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ .

又

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

其中

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e.$$

(2) 因  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sin x, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x, x \in (-\infty, +\infty)$ ,

故取  $x=1$ , 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \sin 1, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = \cos 1.$$

于是

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+2}{(2n+1)!} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right] \\
 &= \frac{1}{2} (\cos 1 + \sin 1).
 \end{aligned}$$

10. 将下列函数展开成  $x$  的幂级数:

(1)  $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ; (2)  $\frac{1}{(2-x)^2}$ .

解 (1) 因  $[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ,

而

$$(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, x \in [-1, 1],$$

故

$$\begin{aligned}
 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) &= \int_0^x (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \\
 &= \int_0^x \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \right] dx \\
 &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}, x \in [-1, 1].
 \end{aligned}$$

(2) 因  $\frac{1}{(2-x)^2} = \left( \frac{1}{2-x} \right)', x \neq 2$ .

而  $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n, x \in (-2, 2)$ .

故  $\frac{1}{(2-x)^2} = \left( \frac{1}{2-x} \right)' = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n \right)' = \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n \right)'$   
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} x^{n-1}, x \in (-2, 2).$

11. 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的函数, 它在  $[-\pi, \pi)$  上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0), \\ e^x, & x \in [0, \pi). \end{cases}$$

将  $f(x)$  展开成傅里叶级数.

解  $f(x)$  满足收敛定理的条件, 且除了  $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$  外处处连续.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x dx = \frac{e^{\pi} - 1}{\pi};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx de^x \\ &= \frac{1}{\pi} \left( e^x \cos nx \Big|_0^{\pi} + n \int_0^{\pi} e^x \sin nx dx \right) \\ &= \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{\pi} + \frac{n}{\pi} \left( e^x \sin nx \Big|_0^{\pi} - n \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx \right) \\ &= \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{\pi} - n^2 a_n, \end{aligned}$$

故

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{(n^2 + 1)\pi} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

而

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx de^x \\ &= \frac{1}{\pi} \left( e^x \sin nx \Big|_0^{\pi} - n \int_0^{\pi} e^x \cos nx dx \right) = -n a_n \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

于是

$$f(x) = \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{n^2 + 1} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1} e^{\pi} + 1}{n^2 + 1} n \sin nx \right],$$

$$x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

## 12. 将函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq h, \\ 0, & h < x \leq \pi \end{cases}$$

分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 (1) 展开成正弦级数:

$$\text{将 } f(x) \text{ 作奇延拓, 得 } \varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, \pi], \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & x \in (-\pi, 0), \end{cases} \quad \text{再将 } \varphi(x) \text{ 作}$$

周期延拓, 得  $\Phi(x)$ , 则  $\Phi(x)$  满足收敛定理的条件, 且在  $(0, \pi]$  上  $\Phi(x) \equiv f(x)$ , 并有间断点  $x = 0, x = h$ .

$$a_n = 0 (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^h \sin nx dx = \frac{2(1 - \cos nh)}{n\pi} (n = 1, 2, \dots).$$

故



$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos nh}{n} \sin nx, x \in (0, h) \cup (h, \pi].$$

(2) 展开成余弦级数:

将  $f(x)$  作偶延拓, 得  $\psi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi] \\ f(-x), & x \in (-\pi, 0] \end{cases}$ , 再将  $\psi(x)$  作

周期延拓得  $\Psi(x)$ , 则  $\Psi(x)$  满足收敛定理的条件, 在  $[0, \pi]$  上  $\Psi(x) \equiv f(x)$ , 且有间断点  $x = h$ .

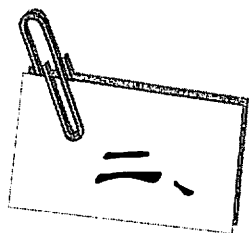
$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^h dx = \frac{2h}{\pi};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^h \cos nx \, dx = \frac{2 \sin nh}{n\pi} (n = 1, 2, \dots);$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

故

$$f(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n} \cos nx, x \in [0, h) \cup (h, \pi].$$



# 全国硕士研究生入学统一 考试数学试题选解

THE UNIVERSITY OF CHICAGO  
PRESS

## (五) 向量代数与空间解析几何

1. (1987. I, II) 与两直线  $\begin{cases} x=1, \\ y=-1+t, \\ z=2+t \end{cases}$  及  $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$  都平行,

且过原点的平面方程为\_\_\_\_\_.

解 两已知直线的方向向量分别为  $s_1=(1,2,1)$  和  $s_2=(0,1,1)$ , 所求平面的法向量  $n$  与  $s_1$  和  $s_2$  均垂直, 故取  $n=s_1 \times s_2=(1,-1,1)$ . 又平面过原点, 故平面方程为  $x-y+z=0$ .

2. (1990. I, II) 过点  $M(1,2,-1)$  且与直线  $\begin{cases} x=-t+2, \\ y=3t-4, \\ z=t-1 \end{cases}$  垂直的平面方程

是\_\_\_\_\_.

解 已知直线的方向向量  $s=(-1,3,1)$ , 所求平面的法向量  $n \parallel s$ , 故可取  $n=s$ . 于是平面的点法式方程为  $-1(x-1)+3(y-2)+(z+1)=0$ , 即  $x-3y-z+4=0$ .

3. (1991. I, II) 已知两条直线的方程是

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}, L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1},$$

则过  $L_1$  且平行于  $L_2$  的平面方程是\_\_\_\_\_.

解 两已知直线的方向向量分别是  $s_1=(1,0,-1)$  和  $s_2=(2,1,1)$ . 所求平面的法向量  $n$  与  $s_1$  和  $s_2$  都垂直, 故可取  $n=s_1 \times s_2=(1,-3,1)$ . 又平面过  $L_1$  上的一点  $(1,2,3)$ , 故所求平面的点法式方程为

$$(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0, \text{ 即 } x-3y+z+2=0.$$

4. (1995. I, II) 设  $(a \times b) \cdot c = 2$ , 则  $[(a+b) \times (b+c)] \cdot (c+a) =$

解  $[(a+b) \times (b+c)] \cdot (c+a)$

$$= (a \times b + a \times c + b \times c) \cdot (c+a)$$

$$= (a \times b) \cdot c + (b \times c) \cdot a$$

$$= (a \times b) \cdot c + (a \times b) \cdot c = 2(a \times b) \cdot c = 4.$$

5. (1996. I, II) 设一平面经过原点及点  $(6,-3,2)$ , 且与平面  $4x-y+$

$2z=8$  垂直, 则此平面方程为\_\_\_\_\_.

解 平面  $4x-y+2z=8$  的法向量  $n_1$  为  $(4, -1, 2)$ , 过原点和点  $(6, -3, 2)$  的直线的方向向量  $s$  为  $(6, -3, 2)$ . 按题设, 所求平面的法向量  $n \perp n_1$  且  $n \perp s$ , 故可取  $n = n_1 \times s = (4, 4, -6)$ . 于是得平面的方程为  $4x+4y-6z=0$ , 或  $2x+2y-3z=0$ .

6. (2006. I) 点  $(2, 1, 0)$  到平面  $3x+4y+5z=0$  的距离  $d=$ \_\_\_\_\_.

解 由点到平面的距离公式,

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \sqrt{2}.$$

7. (1993. I, II) 设有直线  $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$  与  $L_2: \begin{cases} x-y=6, \\ 2y+z=3, \end{cases}$

则  $L_1$  与  $L_2$  的夹角为( ).

(A)  $\frac{\pi}{6}$ .

(B)  $\frac{\pi}{4}$ .

(C)  $\frac{\pi}{3}$ .

(D)  $\frac{\pi}{2}$ .

解  $L_1$  和  $L_2$  的方向向量分别为  $s_1 = (1, -2, 1)$  和  $s_2 = (1, -1, 0) \times (0, 2, 1) = (-1, -1, 2)$ ,  $\cos \theta = \frac{s_1 \cdot s_2}{|s_1| |s_2|} = \frac{1}{2}$ , 故  $\theta = \frac{\pi}{3}$ . 应选(C).

8. (1995. I, II) 设有直线  $L: \begin{cases} x+3y+2z+1=0, \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$  及平面  $\pi: 4x-2y+z-2=0$ , 则直线  $L$  ( ).

(A) 平行于  $\pi$ .

(B) 在  $\pi$  上.

(C) 垂直于  $\pi$ .

(D) 与  $\pi$  斜交.

解 直线  $L$  的方向向量  $s = (1, 3, 2) \times (2, -1, -10) = (-28, 14, -7) // (4, -2, 1)$ , 而  $(4, -2, 1)$  为平面  $\pi$  的法向量, 故直线  $L$  垂直于  $\pi$ . 应选(C).

9. (1998. I) 设矩阵  $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$  是满秩的, 则直线  $\frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} =$

$\frac{z-c_3}{c_1-c_2}$  与直线  $\frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$  ( ).

(A) 相交于一点.

(B) 重合.

(C) 平行但不重合.

(D) 异面.

解 记点  $M$  为  $(a_3, b_3, c_3)$ , 点  $N$  为  $(a_1, b_1, c_1)$ . 两已知直线的方向向量分别为  $s_1 = (a_1-a_2, b_1-b_2, c_1-c_2)$ ,  $s_2 = (a_2-a_3, b_2-b_3, c_2-c_3)$ . 由于

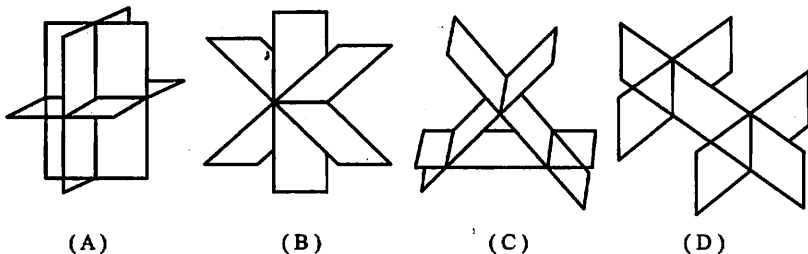
$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \end{vmatrix} = 0,$$

故三向量  $s_1, s_2, \overrightarrow{MN}$  共面. 又由于矩阵  $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$  是满秩的, 故

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

因此  $\frac{a_1 - a_2}{a_2 - a_3} = \frac{b_1 - b_2}{b_2 - b_3} = \frac{c_1 - c_2}{c_2 - c_3}$  不成立, 从而  $s_1$  与  $s_2$  不平行, 于是两直线必交于一点. 应选(A).

10. (2002. I) 设有三张不同平面的方程  $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = b_i, i = 1, 2, 3$ , 它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2, 则这三张平面可能的位置关系为( ).



图研 5-1

解 由于线性方程组系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩, 且小于未知数的个数 3, 故线性方程组有无穷多个解, 因此三张平面不可能没有公共交点, 也不可能仅交于一点, 这样就排除了 C、D 和 A. 又由于系数矩阵的秩为 2, 故必有两张平面的法向量线性无关, 即不共线, 因此三平面必交于一线. 应选(B).

11. (1998. I) 求直线  $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$  在平面  $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$  上的投影直线  $l_0$  的方程, 并求  $l_0$  绕  $y$  轴旋转一周所成曲面的方程.

解法一 直线  $l$  的方向向量  $s = (1, 1, -1)$ , 平面  $\pi$  的法向量  $n = (1, -1, 2)$ . 设经过  $l$  且垂直于平面  $\pi$  的平面方程为  $\pi_1: A(x-1) + By + C(z-1) = 0$ . 则由题设,  $\pi_1$  的法向量  $(A, B, C)$  与  $s$  和  $n$  均垂直, 从而有

$$A + B - C = 0, A - B + 2C = 0,$$

由此解得  $A : B : C = (-1) : 3 : 2$ . 于是得  $\pi_1$  的方程为  $x - 3y - 2z + 1 = 0$ .

从而得  $l_0$  的方程为

$$\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-3y-2z+1=0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x=2y, \\ z=-\frac{1}{2}(y-1). \end{cases}$$

设  $l_0$  绕  $y$  轴旋转一周所得的旋转曲面为  $S$ ,  $(x, y, z)$  为  $S$  上任意一点. 则该点由直线  $l_0$  上的一点  $(x_0, y_0, z_0)$  绕  $y$  轴旋转而得, 于是有关系:  $y = y_0$ ,

$$x^2 + z^2 = x_0^2 + z_0^2 = (2y_0)^2 + \left[-\frac{1}{2}(y_0 - 1)\right]^2 = 4y^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2,$$

从而得  $S$  的方程为

$$4x^2 - 17y^2 + 4z^2 + 2y - 1 = 0.$$

解法二 将直线  $l$  的方程改写为一般方程:  $\begin{cases} x-y-1=0, \\ y+z-1=0. \end{cases}$  过  $l$  的平面束

方程为

$$(x-y-1) + \lambda(y+z-1) = 0,$$

即

$$x + (\lambda-1)y + \lambda z - (1+\lambda) = 0.$$

现确定  $\lambda$  的值, 使向量  $(1, \lambda-1, \lambda)$  与平面  $\pi$  的法向量  $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$  垂直, 即令  $1 - (\lambda-1) + 2\lambda = 0$ , 解得  $\lambda = -2$ . 从而得过  $l$  且垂直于  $\pi$  的平面方程为  $x - 3y - 2z + 1 = 0$ . (下同解法一)

解法三 经过  $l$  且垂直于平面  $\pi$  的平面  $\pi_1$  的法向量  $\mathbf{n}_1$  可取为  $(1, 1, -1) \times (1, -1, 2) = (1, -3, -2)$ . 又  $\pi_1$  通过  $l$  上的点  $(1, 0, 1)$ , 故  $\pi_1$  的方程为

$$(x-1) - 3y - 2(z-1) = 0, \text{ 即 } x - 3y - 2z + 1 = 0.$$

(下同解法一)

## (六) 多元函数微分学

1. (1997. I) 二元函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  在点  $(0, 0)$

处( ).

- (A) 连续、偏导数存在.                      (B) 连续、偏导数不存在.  
(C) 不连续、偏导数存在.                      (D) 不连续、偏导数不存在.

解  $f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$ , 同理,  $f_y(0, 0) = 0$ , 故偏导数存在. 又当  $(x, y)$  沿  $y = kx$  趋向于  $(0, 0)$  时

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = kx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + (kx)^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

随着  $k$  的不同, 该极限值也不同, 所以极限  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  不存在,  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  不连续. 应选(C).

2. (1991. I, II) 由方程  $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$  所确定的函数  $z = z(x, y)$  在点  $(1, 0, -1)$  处的全微分  $dz = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解 在所给方程两端分别取全微分, 得

$$yz dx + xz dy + xy dz + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x dx + y dy + z dz) = 0,$$

因此, 在点  $(1, 0, -1)$  处  $dz = dx - \sqrt{2} dy$ .

3. (1987. II) 设  $z = f(u, x, y)$ ,  $u = xe^y$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

解  $\frac{\partial z}{\partial x} = f_u \frac{\partial u}{\partial x} + f_x = f_u \cdot e^y + f_x,$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (f_u \cdot e^y + f_x) = \left( f_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f_{uy} \right) e^y + f_u \cdot e^y + f_{xu} \frac{\partial u}{\partial y} + f_{xy} \\ &= f_{uu} \cdot xe^{2y} + f_{uy} \cdot e^y + f_u \cdot e^y + f_{xu} \cdot xe^y + f_{xy}. \end{aligned}$$

4. (1995. I, II) 设  $u = f(x, y, z)$ ,  $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$ ,  $y = \sin x$ , 其中  $f, \varphi$  都具有二阶连续偏导数, 且  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$ , 求  $\frac{du}{dx}$ .



解  $\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}$ . 易见  $\frac{dy}{dx} = \cos x$ . 由

$$2x\varphi_1' + e^y \cos x \cdot \varphi_2' + \varphi_3' \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$

得

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\varphi_3'} (2x\varphi_1' + e^y \cos x \cdot \varphi_2'),$$

故

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cos x - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{1}{\varphi_3'} (2x\varphi_1' + e^{\sin x} \cos x \cdot \varphi_2').$$

5. (1996. I, II) 设变换  $\begin{cases} u = x - 2y, \\ v = x + ay \end{cases}$  可把方程

$$6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

简化为  $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ , 求常数  $a$ .

解法一  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial y} = -2 \frac{\partial z}{\partial u} + a \frac{\partial z}{\partial v},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4a \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a-2) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

将上述结果代入原方程, 经整理后得

$$(10+5a) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + (6+a-a^2) \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$$

依题意  $a$  应满足

$$6+a-a^2=0 \quad \text{且} \quad 10+5a \neq 0,$$

解之得  $a=3$ .

解法二 将  $z$  视为以  $x, y$  为中间变量的  $u, v$  的二元复合函数, 由题设可解得

$$x = \frac{au+2v}{a+2}, y = \frac{-u+v}{a+2}.$$

从而  $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{a}{a+2}, \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2}{a+2}, \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{a+2}, \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{a+2},$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{a}{a+2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{a+2} \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{a}{a+2} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \frac{1}{a+2} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial v} \right)$$

$$= \frac{2a}{(a+2)^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{a-2}{(a+2)^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{(a+2)^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

依题意  $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ , 即  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

代入前式, 得  $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{2a-6}{(a+2)^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{a-3}{(a+2)^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

令  $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ , 得  $a-3=0, a+2 \neq 0$ , 故  $a=3$ .

6. (1999. I) 设  $y=y(x), z=z(x)$  是由方程  $z=xf(x+y)$  和  $F(x, y, z)=0$  所确定的函数, 其中  $f$  和  $F$  分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求  $\frac{dz}{dx}$ .

解 分别在  $z=xf(x+y)$  和  $F(x, y, z)=0$  的两端对  $x$  求导或求偏导, 得

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = f + x \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) f', \\ F_x + F_y \frac{dy}{dx} + F_z \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

整理后得

$$\begin{cases} -xf' \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = f + xf', \\ F_y \frac{dy}{dx} + F_z \frac{dz}{dx} = -F_x. \end{cases}$$

由此解得

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(f + xf')F_y - xf'F_x}{F_y + xf'F_z} (F_y + xf'F_z \neq 0).$$

7. (2000. I) 设  $z = f\left(xy, \frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数,  $g$  具有二阶连续导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

解  $\frac{\partial z}{\partial x} = yf'_1 + \frac{1}{y}f'_2 - \frac{y}{x^2}g'$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( yf'_1 + \frac{1}{y}f'_2 - \frac{y}{x^2}g' \right) \\ &= f'_1 + y \left( xf''_{11} - \frac{x}{y^2}f''_{12} \right) - \frac{1}{y^2}f'_2 + \frac{1}{y} \left( xf''_{21} - \frac{x}{y^2}f''_{22} \right) - \frac{1}{x^2}g' - \frac{y}{x^3}g'' \\ &= f'_1 - \frac{1}{y^2}f'_2 + xyf''_{11} - \frac{x}{y^3}f''_{22} - \frac{1}{x^2}g' - \frac{y}{x^3}g''. \end{aligned}$$

8. (2001. I) 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(1, 1)$  处可微, 且  $f(1, 1) = 1$ ,  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,1)} = 2, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,1)} = 3, \varphi(x) = f(x, f(x, x))$ . 求  $\left. \frac{d}{dx} \varphi^3(x) \right|_{x=1}$ .

解  $\varphi(1) = f(1, f(1, 1)) = f(1, 1) = 1$ ,

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\right|_{x=1} &= \left[3\varphi^2(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\right]\bigg|_{x=1} = 3\varphi^2(x)[f'_1(x, f(x, x)) + \\ &\quad f'_2(x, f(x, x))(f'_1(x, x) + f'_2(x, x))]\bigg|_{x=1} \\ &= 3 \cdot 1 \cdot [2 + 3(2 + 3)] = 51.\end{aligned}$$

9. (2005. I, II) 设函数  $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t)dt$ , 其中函数  $\varphi$  具有二阶导数,  $\psi$  具有一阶导数, 则必有( ).

(A)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ .

(B)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ .

(C)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ .

(D)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

解  $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x+y) + \varphi'(x-y) + \psi(x+y) - \psi(x-y),$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(x+y) - \varphi'(x-y) + \psi(x+y) + \psi(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi''(x+y) - \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) + \psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y).$$

由此可知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

故应选(B).

10. (2005. III, IV) 设  $f(u)$  具有二阶连续导数, 且  $g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) + yf\left(\frac{x}{y}\right)$ , 求  $x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ .

解 由已知条件可得

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right) + f'\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4}f''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y^3}f'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2} f''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x^2}{y^3} f''\left(\frac{x}{y}\right),$$

所以

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= \frac{2y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^2} f''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x^2}{y} f''\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y^2}{x^2} f''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x^2}{y} f''\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= \frac{2y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

11. (1992. I, II) 在曲线  $x=t, y=-t^2, z=t^3$  的所有切线中, 与平面  $x+2y+z=4$  平行的切线( ).

(A) 只有 1 条.

(B) 只有 2 条.

(C) 至少有 3 条.

(D) 不存在.

解 曲线在对应于参数  $t_0$  的点处的切线的方向向量为  $T=(1, -2t_0, 3t_0^2)$ , 该切线与平面平行  $\Leftrightarrow T$  与该平面的法向量  $n=(1, 2, 1)$  垂直  $\Leftrightarrow T \cdot n = 0 \Leftrightarrow 1 - 4t_0 + 3t_0^2 = 0 \Leftrightarrow t_0 = 1$  或  $t_0 = \frac{1}{3}$ , 故选 (B).

12. (2003. I) 曲面  $z=x^2+y^2$  与平面  $2x+4y-z=0$  平行的切平面的方程是\_\_\_\_\_.

解 曲面  $z=x^2+y^2$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处的切平面方程为

$$2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) - (z-z_0) = 0,$$

利用  $z_0 = x_0^2 + y_0^2$ , 得

$$2x_0x + 2y_0y - z - z_0 = 0.$$

由题设可知,

$$\frac{2x_0}{2} = \frac{2y_0}{4} = \frac{-1}{-1},$$

故  $x_0=1, y_0=2, z_0=x_0^2+y_0^2=5$ , 所求切平面方程是  $2x+4y-z=5$ .

13. (1988. II) 求椭球面  $x^2+2y^2+3z^2=21$  上某点  $M$  处的切平面  $\pi$  的方程, 使  $\pi$  过已知直线  $L: \frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{2z-1}{-2}$ .

解 设  $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$ , 则

$$F_x = 2x, F_y = 4y, F_z = 6z.$$

椭球面在点  $M(x_0, y_0, z_0)$  处的切平面  $\pi$  的方程为

$$2x_0(x-x_0) + 4y_0(y-y_0) + 6z_0(z-z_0) = 0,$$

即

$$x_0x + 2y_0y + 3z_0z = 21.$$

因为平面  $\pi$  过直线  $L$ , 故  $L$  上任意两点, 比如  $A(6, 3, \frac{1}{2}), B(0, 0, \frac{7}{2})$  应满足  $\pi$  的方程, 代入有

$$6x_0 + 6y_0 + \frac{3}{2}z_0 = 21, \quad (1)$$

$$z_0 = 2. \quad (2)$$

又因为  $(x_0, y_0, z_0)$  在椭球面上, 有

$$x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21. \quad (3)$$

解(1), (2), (3), 得  $x_0 = 3, y_0 = 0, z_0 = 2$  及  $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 2$ .

故所求切平面方程为

$$x + 2z = 7 \quad \text{和} \quad x + 4y + 6z = 21.$$

14. (1997. I) 设直线  $l: \begin{cases} x + y + b = 0, \\ x + ay - z - 3 = 0 \end{cases}$  在平面  $\Pi$  上, 而平面  $\Pi$  与曲

面  $z = x^2 + y^2$  相切于点  $(1, -2, 5)$ , 求  $a, b$  之值.

解法一 曲面在点  $(1, -2, 5)$  处的一个法向量  $n = (2, -4, -1)$ , 故曲面的切平面即平面  $\Pi$  的方程为

$$2(x-1) - 4(y+2) - (z-5) = 0,$$

即

$$2x - 4y - z - 5 = 0.$$

再由  $l: \begin{cases} x + y + b = 0, \\ x + ay - z - 3 = 0 \end{cases}$  可得  $y = -(x+b), z = x - a(x+b) - 3$ , 代入平面

$\Pi$  的方程, 得  $2x + 4(x+b) - x + a(x+b) + 3 - 5 = 0$ ,

因有

$$5 + a = 0, \quad 4b + ab - 2 = 0.$$

由此方程组解得

$$a = -5, \quad b = -2.$$

解法二 过  $l$  的平面方程设为  $x + ay - z - 3 + \lambda(x + y + b) = 0$ , 即

$$(1+\lambda)x + (a+\lambda)y - z - 3 + \lambda b = 0.$$

曲面  $z = x^2 + y^2$  在点  $(1, -2, 5)$  处的一个法向量  $n = (2, -4, -1)$ , 故由题设知

$$\frac{1+\lambda}{2} = \frac{a+\lambda}{-4} = \frac{-1}{-1},$$

解得

$$\lambda = 1, \quad a = -5.$$

又点  $(1, -2, 5)$  在平面  $\Pi$  上, 故  $(1+\lambda) - 2(a+\lambda) - 8 + \lambda b = 0$ .

将  $\lambda = 1, a = -5$  代入, 解得  $b = -2$ . 因此  $a = -5, b = -2$ .

15. (1993. I, II) 由曲线  $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12, \\ z = 0 \end{cases}$  绕  $y$  轴旋转一周得到的旋转面

在点  $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$  处的指向外侧的单位法向量为\_\_\_\_\_.

解 给定曲线绕  $y$  轴旋转一周得到的旋转面方程为  $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 12 = 0$ , 此旋转面在点  $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$  处指向外侧的单位法向量为

$$e_n = \frac{1}{|n|} (6x, 4y, 6z) \Big|_{(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{5}} (0, \sqrt{2}, \sqrt{3}).$$

16. (2000. I) 曲面  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  在点  $(1, -2, 2)$  的法线方程为\_\_\_\_\_.

解 令  $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$ , 则在点  $(1, -2, 2)$  处  $F_x = 2, F_y = -8, F_z = 12$ . 故所求的法线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{6}.$$

17. (1996. I, II) 函数  $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$  在点  $A(1, 0, 1)$  处沿点  $A$  指向点  $B(3, -2, 2)$  方向的方向导数为\_\_\_\_\_.

解 方向  $l = \overrightarrow{AB} = (2, -2, 1)$ ,  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ ,  $\cos \beta = -\frac{2}{3}$ ,  $\cos \gamma = \frac{1}{3}$ .

$$\begin{aligned} \text{方向导数} \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{(1,0,1)} &= \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right] \Big|_{(1,0,1)} \\ &= \left[ \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \cos \alpha + \frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}} \left( \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \cos \beta + \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \cos \gamma \right) \right] \Big|_{(1,0,1)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

18. (1991. I, II) 设  $n$  是曲面  $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$  在点  $P(1, 1, 1)$  处的指向外侧的法向量, 求函数  $u = \frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$  在点  $P$  处沿方向  $n$  的方向导数.

解 设  $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 6$ , 则

$$F_x = 4x, F_y = 6y, F_z = 2z.$$

$$n = (4x, 6y, 2z) \Big|_P = (4, 6, 2), e_n = \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 3, 1).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_P = \frac{6x}{z\sqrt{6x^2 + 8y^2}} \Big|_P = \frac{6}{\sqrt{14}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_P = \frac{8y}{z\sqrt{6x^2 + 8y^2}} \Big|_P = \frac{8}{\sqrt{14}}, \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_P = -\frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z^2} \Big|_P = -\sqrt{14}.$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_P &= \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\hat{n}, i) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\hat{n}, j) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\hat{n}, k) \right] \Big|_P \\ &= \frac{6}{\sqrt{14}} \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{8}{\sqrt{14}} \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} - \sqrt{14} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{11}{7}. \end{aligned}$$

19. (1998. I) 确定常数  $\lambda$ , 使在右半平面  $x > 0$  上的向量  $A(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda i - x^2(x^4 + y^2)^\lambda j$  为某二元函数  $u(x, y)$  的梯度, 并求  $u(x, y)$ .

解 令  $P = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda, Q = -x^2(x^4 + y^2)^\lambda$ .  $A(x, y)$  在右半平面  $x > 0$  上为某二元函数  $u(x, y)$  的梯度的充要条件是  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ , 即

$$-2x(x^4+y^2)^\lambda - 4\lambda x^5(x^4+y^2)^{\lambda-1} = 2x(x^4+y^2)^\lambda + 4\lambda xy^2(x^4+y^2)^{\lambda-1},$$

或

$$4x(x^4+y^2)^\lambda(\lambda+1) = 0,$$

解得  $\lambda = -1$ . 于是, 在右半平面内任取一点, 例如  $(1, 0)$  作为积分路径的起点, 则得

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{2xydx - x^2dy}{x^4+y^2} = \int_1^x \frac{2x \cdot 0}{x^4+0^2} dx - \int_0^y \frac{x^2}{x^4+y^2} dy + C \\ &= -\arctan \frac{y}{x^2} + C. \end{aligned}$$

20. (2001. I) 设  $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ , 则  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)|_{(1,-2,2)} =$  \_\_\_\_\_.

解 由梯度的定义

$$\operatorname{grad} r = \left( \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right) = \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right).$$

由散度的定义

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} r) &= \operatorname{div} \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r} \right) \\ &= \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

故  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)|_{(1,-2,2)} = \frac{2}{3}.$

21. (2005. I) 设有三元方程  $xy - z \ln y + e^x = 1$ , 根据隐函数存在定理, 存在点  $(0, 1, 1)$  的一个邻域, 在此邻域内该方程( ).

- (A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数  $z = z(x, y)$ .
- (B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数  $y = y(x, z)$  和  $z = z(x, y)$ .
- (C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数  $x = x(y, z)$  和  $z = z(x, y)$ .
- (D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数  $x = x(y, z)$  和  $y = y(x, z)$ .

解 令  $F(x, y, z) = xy - z \ln y + e^x - 1$ , 则

$$F_x = y + ze^{ex}, F_y = x - \frac{z}{y}, F_z = -\ln y + xe^{ex}.$$

$$F_x(0, 1, 1) = 2 \neq 0, F_y(0, 1, 1) = -1 \neq 0, F_z(0, 1, 1) = 0.$$

由隐函数存在定理知(A)、(B)、(C)均不成立, 只有(D)成立.

22. (1994. II) 在椭圆  $x^2 + 4y^2 = 4$  上求一点, 使其到直线  $2x + 3y - 6 = 0$  的距离最短.

解 设  $P(x, y)$  为椭圆  $x^2 + 4y^2 = 4$  上任意一点, 则  $P$  到直线  $2x + 3y - 6 = 0$  的距离为  $d = \frac{|2x + 3y - 6|}{\sqrt{13}}$ . 求  $d$  的最小值点即求  $d^2$  的最小值点. 作

拉格朗日函数

$$L(x, y) = \frac{1}{13}(2x + 3y - 6)^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 4),$$

令

$$\begin{cases} L_x = \frac{4}{13}(2x + 3y - 6) + 2\lambda x = 0, \\ L_y = \frac{6}{13}(2x + 3y - 6) + 8\lambda y = 0. \end{cases}$$

由此得  $y = \frac{3}{8}x$ , 代入  $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ . 求得

$$x_1 = \frac{8}{5}, y_1 = \frac{3}{5}; x_2 = -\frac{8}{5}, y_2 = -\frac{3}{5}.$$

于是

$$d|_{(x_1, y_1)} = \frac{1}{\sqrt{13}}, d|_{(x_2, y_2)} = \frac{11}{\sqrt{13}}.$$

由问题的实际意义知最短距离存在, 因此  $(\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$  即为所求点.

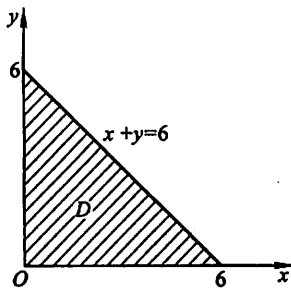
23. (1995. V) 求二元函数  $z = f(x, y) = x^2y(4 - x - y)$  在由直线  $x + y = 6$ 、 $x$  轴和  $y$  轴所围成的闭区域  $D$  上的极值, 最大值与最小值.

解 由方程组

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2xy(4 - x - y) - x^2y = 0, \\ f_y(x, y) = x^2(4 - x - y) - x^2y = 0. \end{cases}$$

得  $x = 0 (0 \leq y \leq 6)$  及点  $(4, 0), (2, 1)$ .

点  $(4, 0)$  及线段  $x = 0 (0 \leq y \leq 6)$  在  $D$  的边界上, 只有一点  $(2, 1)$  在  $D$  的内部 (见图研 6-1), 是可能极值点.



图研 6-1

$$f_{xx} = 8y - 6xy - 2y^2, f_{xy} = 8x - 3x^2 - 4xy, f_{yy} = -2x^2.$$

在点  $(2, 1)$  处

$$A = f_{xx}|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = -6, B = f_{xy}|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = -4, C = f_{yy}|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = -8.$$

$AC - B^2 = 32 > 0$ , 且  $A < 0$ , 因此点  $(2, 1)$  是  $z = f(x, y)$  的极大值点, 极大值  $f(2, 1) = 4$ .

在  $D$  的边界  $x = 0 (0 \leq y \leq 6)$  及  $y = 0 (0 \leq x \leq 6)$  上  $f(x, y) = 0$ . 在边界  $x + y = 6$  上,  $y = 6 - x$ , 代入  $f(x, y)$  中得

$$z = 2x^3 - 12x^2 \quad (0 \leq x \leq 6).$$

由  $z' = 6x^2 - 24x = 0$  得  $x = 0, x = 4$ .

在边界  $x + y = 6$  上对应  $x = 0, 4, 6$  处的函数值分别为:

$$z|_{x=0} = 2x^3 - 12x^2|_{x=0} = 0,$$



$$z|_{x=4} = 2x^3 - 12x^2|_{x=4} = -64,$$

$$z|_{x=6} = 2x^3 - 12x^2|_{x=6} = 0.$$

因此,  $z = f(x, y)$  在边界上的最大值为 0, 最小值为  $f(4, 2) = -64$ , 将边界上最大值和最小值与驻点  $(2, 1)$  处的值比较得,  $z = f(x, y)$  在闭区域上的最大值为  $f(2, 1) = 4$ ; 最小值为  $f(4, 2) = -64$ .

24. (2006. I) 设  $f(x, y)$  与  $\varphi(x, y)$  均为可微函数, 且  $\varphi'_y(x, y) \neq 0$ . 已知  $(x_0, y_0)$  是  $f(x, y)$  在约束条件  $\varphi(x, y) = 0$  下的一个极值点, 下列选项正确的是 ( ).

(A) 若  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) = 0$ .

(B) 若  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

(C) 若  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) = 0$ .

(D) 若  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

解 由拉格朗日乘数法, 得

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

消去  $\lambda$ , 得

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{f'_y(x_0, y_0) \varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)}.$$

故当  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$  时, 必有  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ , 应选 (D).

25. (2004. I) 设  $z = z(x, y)$  是由  $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$  确定的函数, 求  $z = z(x, y)$  的极值点和极值.

解 在  $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$  两端分别对  $x, y$  求导, 得

$$\begin{cases} 2x - 6y - 2y \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} -6x + 20y - 2z - 2y \frac{\partial z}{\partial y} - 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

令  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ , 得

$$\begin{cases} x - 3y = 0, \\ -3x + 10y - z = 0. \end{cases}$$

解得  $x = 3y, z = y$ . 代入  $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ , 得

$$\begin{cases} x = 9, \\ y = 3, \\ z = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -9, \\ y = -3, \\ z = -3. \end{cases}$$

在 (1) 两端对  $x$  求导, (2) 两端分别对  $x, y$  求导, 得

$$\begin{aligned} 2 - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 0, \\ -6 - 2 \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= 0, \\ 20 - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$

将  $x=9, y=3, z=3$  代入以上各式, 求得

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(9,3,3)} = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(9,3,3)} = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(9,3,3)} = \frac{5}{3},$$

$AC - B^2 = \frac{1}{36} > 0$ , 又  $A = \frac{1}{6} > 0$ , 从而点  $(9, 3)$  是  $z(x, y)$  的极小值点, 极小值为  $z(9, 3) = 3$ .

类似的, 可得

$$\begin{aligned} A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-9,-3,-3)} &= -\frac{1}{6}, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-9,-3,-3)} = \frac{1}{2}, \\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-9,-3,-3)} &= -\frac{5}{3}, \\ AC - B^2 &= \frac{1}{36} > 0, \end{aligned}$$

又  $A = -\frac{1}{6} < 0$ , 从而点  $(-9, -3)$  是  $z(x, y)$  的极大值点, 极大值为  $z(-9, -3) = -3$ .

26. (2005. II) 已知函数  $z = f(x, y)$  的全微分  $dz = 2xdx - 2ydy$ , 并且  $f(1, 1) = 2$ . 求  $f(x, y)$  在椭圆域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$  上的最大值和最小值.

解法一 由  $dz = 2xdx - 2ydy$  可知

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2 + C.$$

再由  $f(1, 1) = 2$ , 得  $C = 2$ , 故

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2 + 2.$$

令  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0$ , 求得驻点  $(0, 0)$ .

在椭圆  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$  上,  $z = x^2 - (4 - 4x^2) + 2$ , 即

$$z = 5x^2 - 2 \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

其最大值为  $z|_{x=\pm 1} = 3$ , 最小值为  $z|_{x=0} = -2$ . 再与  $f(0, 0) = 2$  比较, 可知  $f(x, y)$  在椭圆域  $D$  上的最大值为 3, 最小值为 -2.

解法二 同解法一, 求得驻点  $(0, 0)$ .

用拉格朗日乘数法求此函数在椭圆  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$  上的极值.

$$\text{设 } L = x^2 - y^2 + 2 + \lambda \left( x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \right),$$

令

$$\begin{cases} L_x = 2x + 2\lambda x = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} L_y = -2y + \frac{\lambda}{2}y = 0. \end{cases} \quad (2)$$

又

$$x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0. \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)解得:

$$\lambda = -1, x = \pm 1, y = 0; \lambda = 4, x = 0, y = \pm 2.$$

即有 4 个可能的极值点  $(1, 0), (-1, 0), (0, 2), (0, -2)$ .

又  $f(1, 0) = f(-1, 0) = 3, f(0, 2) = f(0, -2) = -2$ , 再与  $f(0, 0) = 2$  比较, 得  $f(x, y)$  在  $D$  上的最大值为 3, 最小值为 -2.

27. (2006. I) 设函数  $f(u)$  在  $(0, +\infty)$  内具有二阶导数, 且  $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$  满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

(I) 验证  $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$ ;

(II) 若  $f(1) = 0, f'(1) = 1$ , 求函数  $f(u)$  的表达式.

解 (I) 由  $z = f(u), u = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f' \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'' \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} + f' \cdot \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f' \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f'' \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} + f' \cdot \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

由已知条件, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f'' + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} f' = 0,$$

即

$$f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0. \quad (1)$$

(II) 方程(1)是可降阶的二阶微分方程, 令  $f'(u) = p$ , 则得

$$\frac{dp}{du} + \frac{1}{u}p = 0,$$

解得

$$p = Ce^{-\int \frac{1}{u} du} = \frac{C}{u},$$

由已知条件  $p|_{u=1} = 1$ , 得  $C = 1$ , 故  $f'(u) = \frac{1}{u}$ , 从而

$$f(u) = \ln u + C.$$

由  $f(1) = 0$ , 得  $C = 0$ , 因此  $f(u) = \ln u$ .

## (七) 多元函数积分学

1. (2001. I) 交换二次积分的积分次序:  $\int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx &= - \int_{-1}^0 dy \int_{1-y}^2 f(x, y) dx = - \iint_D f(x, y) dx dy \\ &= - \int_1^2 dx \int_{1-x}^0 f(x, y) dy = \int_1^2 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy, \end{aligned}$$

其中  $D = \{(x, y) \mid 1-y \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 0\}$   
 $= \{(x, y) \mid 1-x \leq y \leq 0, 1 \leq x \leq 2\}.$

注 交换二次积分的积分次序时, 需先将二次积分化为二重积分(尽管解题时往往省略这一步), 而将二次积分化为二重积分时, 必须保证二次积分中的每个定积分的下限  $\leq$  上限. 本题中, 由于当  $-1 \leq y \leq 0$  时,  $1-y \leq 2$ , 故需将  $\int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx$  先写为  $-\int_{-1}^0 dy \int_{1-y}^2 f(x, y) dx$ . 如果不注意这一点, 就会得到错误结果:  $\int_1^2 dx \int_{1-x}^0 f(x, y) dy$ .

2. (2006. I, II) 设  $f(x, y)$  为连续函数, 则  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$  等于 ( ).

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy. & \text{(B)} \quad & \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy. \\ \text{(C)} \quad & \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx. & \text{(D)} \quad & \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

解 积分区域  $D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$   
 $= \{(x, y) \mid y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\},$

故选(C).

3. (2006. I, II) 设区域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ , 计算二重积分

$$I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解法一 } I_1 &= \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy \xrightarrow{\text{极坐标}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{1+\rho^2} \rho d\rho \\
 &= \left. \frac{\pi}{2} \ln(1+\rho^2) \right|_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln 2; \\
 I_2 &= \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy \xrightarrow{\text{极坐标}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{1+\rho^2} \rho d\rho \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^1 \frac{\rho^3}{1+\rho^2} d\rho = 0,
 \end{aligned}$$

所以  $I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} \ln 2$ .

解法二  $I_1$  同上.

由于积分区域  $D$  关于  $x$  轴对称, 函数  $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$  关于  $y$  是奇函数, 所以

$$I_2 = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy = 0,$$

因此  $I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} \ln 2$ .

4. (2001. I) 计算二重积分  $\iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy$ , 其中

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

解 设  $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\},$

$$D_2 = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\},$$

$$\begin{aligned}
 \text{则 } \iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy &= \iint_{D_1} e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy + \iint_{D_2} e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy \\
 &= \iint_{D_1} e^{x^2} dx dy + \iint_{D_2} e^{y^2} dx dy \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy + \int_0^1 dy \int_0^y e^{y^2} dx \\
 &= \int_0^1 x e^{x^2} dx + \int_0^1 y e^{y^2} dy = 2 \int_0^1 x e^{x^2} dx = e - 1.
 \end{aligned}$$

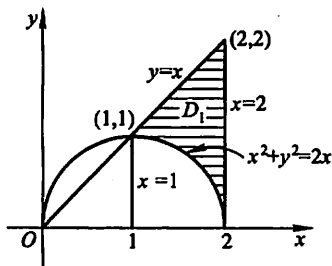
5. (2000. IV) 设  $f(x, y) = \begin{cases} x^2 y, & \text{若 } 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

求  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 2x\}$ .

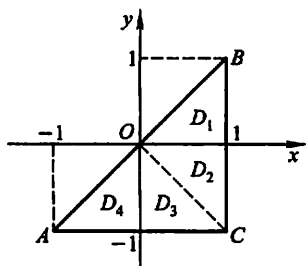
解 如图研 7-1, 记  $D_1 = \{(x, y) \mid \sqrt{2x-x^2} \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\}$ , 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} x^2 y dx dy = \int_1^2 x^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^x y dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_1^2 x^2 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{\sqrt{2x-x^2}}^x dx \\
 &= \int_1^2 (x^4 - x^3) dx = \frac{49}{20}.
 \end{aligned}$$



图研 7-1



图研 7-2

6. (2001. III) 求二重积分  $\iint_D y[1 + xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}] dx dy$  的值, 其中  $D$  是由直线  $y=x, y=-1$  及  $x=1$  围成的平面区域.

解 原式  $= \iint_D y dx dy + \iint_D xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy.$

如图研 7-2, 将  $D$  划分成  $D_1, D_2, D_3, D_4$  四块. 由于  $xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$  关于  $y$  是奇函数, 而闭区域  $D_1 \cup D_2$  关于  $x$  轴对称, 故  $\iint_{D_1 \cup D_2} xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy = 0;$

类似可说明  $\iint_{D_3 \cup D_4} xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy = 0.$

从而  $\iint_D xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy = 0.$

又  $\iint_D y dx dy = \int_{-1}^1 y dy \int_y^1 dx = \int_{-1}^1 y(1-y) dy = -\frac{2}{3},$

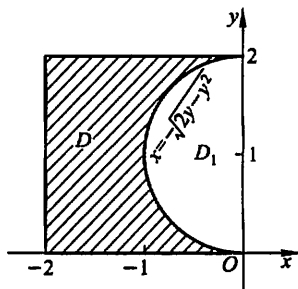
故 原式  $= -\frac{2}{3}.$

7. (1999. III, IV) 计算二重积分  $\iint_D y dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $x=-2, y=0, y=2$  以及曲线  $x=-\sqrt{2y-y^2}$  所围成的平面区域.

解法一 设闭区域  $D$  和  $D_1$  如图研 7-3 所示, 则有

$$\iint_D y dx dy = \iint_{D \cup D_1} y dx dy - \iint_{D_1} y dx dy,$$

而  $\iint_{D \cup D_1} y dx dy = \int_{-2}^0 dx \int_0^2 y dy = 4,$



图研 7-3

$$\begin{aligned}
 \iint_{D_1} y dx dy & \xrightarrow{\text{极坐标}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} \rho \sin\theta \cdot \rho d\rho \\
 &= \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^4\theta d\theta \xrightarrow{t=\pi-\theta} \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt \\
 &= \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},
 \end{aligned}$$

故原式 =  $4 - \frac{\pi}{2}$ .

解法二  $D = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq -\sqrt{2y-y^2}, 0 \leq y \leq 2\}$ .

$$\begin{aligned}
 \iint_D y dx dy &= \int_0^2 y dy \int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}} dx \\
 &= \int_0^2 y(2 - \sqrt{2y-y^2}) dy \\
 &= 2 \int_0^2 y dy - \int_0^2 y \sqrt{2y-y^2} dy \\
 &= 4 - \int_0^2 y \sqrt{1-(y-1)^2} dy,
 \end{aligned}$$

令  $y-1 = \sin t$ , 则

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 y \sqrt{1-(y-1)^2} dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin t) \cos^2 t dt \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi}{2},
 \end{aligned}$$

于是原式 =  $4 - \frac{\pi}{2}$ .

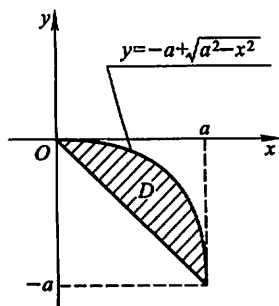
8. (2000. III) 计算二重积分  $\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} d\sigma$ , 其中  $D$  是由曲线  $y = -a + \sqrt{a^2-x^2}$  ( $a > 0$ ) 和直线  $y = -x$  围成的区域.

解 积分区域  $D$  在极坐标系中可表示为

$$D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq -2a \sin \theta, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq 0\}$$

(图研 7-4),

$$\begin{aligned}
 \text{故 原式} &= \iint_D \frac{\rho}{\sqrt{4a^2-\rho^2}} \cdot \rho d\rho d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{-2a \sin \theta} \frac{\rho^2}{\sqrt{4a^2-\rho^2}} d\rho,
 \end{aligned}$$



图研 7-4



令  $\rho = 2a \sin t$ , 则

$$\begin{aligned}\int_0^{-2a \sin \theta} \frac{\rho^2}{\sqrt{4a^2 - \rho^2}} d\rho &= \int_0^{-\theta} 4a^2 \sin^2 t dt = 2a^2 \int_0^{-\theta} (1 - \cos 2t) dt \\ &= 2a^2 \left( -\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right).\end{aligned}$$

于是

$$\text{原式} = 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left( -\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) d\theta = a^2 \left( \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \right).$$

9. (1995. I) 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 并设  $\int_0^1 f(x) dx = A$ , 求

$$\int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy.$$

解法一 交换积分次序可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy &= \int_0^1 dy \int_0^y f(x) f(y) dx \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x f(y) f(x) dy.\end{aligned}$$

上式中的第二个等号是由于将积分变量  $x, y$  分别改记为  $y, x$ , 不影响二次积分的值. 从而有

$$\begin{aligned}2 \int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy &= \int_0^1 dx \int_0^x f(x) f(y) dy + \int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 f(x) f(y) dy = \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 f(y) dy = A^2,\end{aligned}$$

故 
$$\int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy = \frac{1}{2} A^2.$$

解法二 记函数  $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$ , 则  $F(0) = A, F(1) = 0$ , 且  $dF(x) = -f(x) dx$ . 利用分部积分公式, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy &= \int_0^1 \left[ \int_x^1 f(y) dy \right] f(x) dx = - \int_0^1 F(x) dF(x) \\ &= - \left[ \frac{F^2(x)}{2} \right]_0^1 = \frac{A^2}{2}.\end{aligned}$$

10. (1989. I, II) 设半径为  $R$  的球面  $\Sigma$  的球心在定球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 上, 问当  $R$  取何值时, 球面  $\Sigma$  在定球面内部的那部分的面积最大?

解 不妨设  $z$  轴通过球面  $\Sigma$  的中心, 则  $\Sigma$  的方程为

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = R^2.$$

与定球面方程  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  联立, 消去  $z$ , 可得两球面的交线在  $xOy$  面上的投影曲线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4a^2}(4a^2 - R^2), \\ z = 0. \end{cases}$$

记投影曲线所围的平面区域为  $D_{xy}$ . 球面  $\Sigma$  在定球面内部的那部分曲面的方程为

$$z = a - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

该部分曲面的面积为

$$\begin{aligned} S(R) &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{R}{2a}\sqrt{4a^2 - R^2}} \frac{\rho R d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \\ &= 2\pi R^2 - \frac{\pi R^3}{a}. \end{aligned}$$

$$S'(R) = 4\pi R - \frac{3\pi R^2}{a}, S''(R) = 4\pi - \frac{6\pi R}{a}.$$

令  $S'(R) = 0$ , 得驻点  $R_1 = 0$  (舍去),  $R_2 = \frac{4}{3}a$ ,

$$S''\left(\frac{4}{3}a\right) = -4\pi < 0,$$

故当  $R = \frac{4}{3}a$  时, 球面  $\Sigma$  在定球面内部的那部分的面积最大.

11. (2000. I) 设有一半径为  $R$  的球体,  $P_0$  是此球的表面上一个定点, 球体上任一点的密度与该点到  $P_0$  距离的平方成正比 (比例常数  $k > 0$ ), 求球体的重心位置.

解 记球体为  $\Omega$ , 以  $\Omega$  的球心为原点  $O$ , 射线  $OP_0$  为正  $z$  轴建立直角坐标系, 则  $P_0$  的坐标是  $(0, 0, R)$ , 球面方程为  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . 设重心位置为  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , 则由对称性得  $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$ ,

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z \cdot k[x^2 + y^2 + (z - R)^2] dv}{\iiint_{\Omega} k[x^2 + y^2 + (z - R)^2] dv}.$$

由对称性可知  $\iiint_{\Omega} z dv = 0; \iiint_{\Omega} z^3 dv = 0; \iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2) dv = 0;$

$$\iiint_{\Omega} z^2 dv = \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv,$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} [x^2 + y^2 + (z-R)^2] dv &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv + \iiint_{\Omega} R^2 dv \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr + \frac{4}{3} \pi R^5 \\ &= \frac{4}{5} \pi R^5 + \frac{4}{3} \pi R^5 = \frac{32}{15} \pi R^5;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z[x^2 + y^2 + (z-R)^2] dv &= -2R \iiint_{\Omega} z^2 dv \\ &= -\frac{2R}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = -\frac{8}{15} \pi R^6,\end{aligned}$$

故  $\bar{z} = \left(-\frac{8}{15} \pi R^6\right) / \left(\frac{32}{15} \pi R^5\right) = -\frac{R}{4},$

因此球体  $\Omega$  的重心位置为  $(0, 0, -\frac{R}{4})$ .

12. (1998. I) 设  $l$  为椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ , 其周长记为  $a$ , 则  $\oint_l (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 因为  $l$  关于  $y$  轴对称, 且  $2xy$  关于  $x$  是奇函数, 所以  $\oint_l 2xy ds = 0$ . 又在  $l$  上,  $3x^2 + 4y^2 = 12$ , 所以

$$\text{原积分} = \oint_l 2xy ds + \oint_l (3x^2 + 4y^2) ds = 0 + \oint_l 12 ds = 12a.$$

13. (2006. II) 设  $\Sigma$  是锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq 1)$  的下侧, 则  $\iint_{\Sigma} x dydz + 2y dzdx + 3(z-1) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 添加辅助曲面  $\Sigma': \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$ , 取上侧, 则由高斯公式得

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma+\Sigma'} x dydz + 2y dzdx + 3(z-1) dx dy &= \iiint_{\Omega} (1+2+3) dv = 6 \iiint_{\Omega} dv \\ &= 6 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 1^2 \cdot 1 = 2\pi,\end{aligned}$$

而在  $\Sigma'$  上,

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} x dydz + 2y dzdx + 3(z-1) dx dy &= \iint_{\Sigma} 3(z-1) dx dy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 3(1-1) dx dy = 0,\end{aligned}$$

于是

$$\text{原式} = 2\pi - 0 = 2\pi.$$

14. (1996. I, II) 已知  $\frac{(x+ay)dx + ydy}{(x+y)^2}$  为某函数的全微分, 则  $a$  等于( ).

(A) -1.

(B) 0

(C) 1.

(D) 2.

解

$$P(x, y) = \frac{x+ay}{(x+y)^2}, Q(x, y) = \frac{y}{(x+y)^2},$$

由  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  即可解得  $a=2$ . 应选(D).

15. (1995. I, II) 设曲线  $Q(x, y)$  在  $xOy$  平面上具有一阶连续偏导数, 曲线积分  $\int_L 2xydx + Q(x, y)dy$  与路径无关, 并且对任意  $t$  恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + Q(x, y)dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + Q(x, y)dy,$$

求  $Q(x, y)$ .

解 由曲线积分与路径无关的条件知

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x,$$

因此  $Q(x, y) = x^2 + \varphi(y)$ , 其中  $\varphi(y)$  为待定的可导函数, 采用从点  $(0, 0)$  到点  $(t, 0)$  再到点  $(t, 1)$  的有向折线作为积分路径, 可得

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + Q(x, y)dy = \int_0^t [t^2 + \varphi(y)]dy = t^2 + \int_0^1 \varphi(y)dy;$$

采用从点  $(0, 0)$  到点  $(1, 0)$  再到点  $(1, t)$  的有向折线作为积分路径, 可得

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + Q(x, y)dy = \int_0^t [1^2 + \varphi(y)]dy = t + \int_0^t \varphi(y)dy.$$

由题设知

$$t^2 + \int_0^1 \varphi(y)dy = t + \int_0^t \varphi(y)dy.$$

两边对  $t$  求导, 得

$$2t = 1 + \varphi(t), \quad \varphi(t) = 2t - 1.$$

从而  $\varphi(y) = 2y - 1$ . 因此

$$Q(x, y) = x^2 + 2y - 1.$$

16. (2006. I) 设在上半平面  $D = \{(x, y) | y > 0\}$  内, 函数  $f(x, y)$  具有连续偏导数, 且对任意的  $t > 0$  都有  $f(tx, ty) = t^{-2}f(x, y)$ . 证明: 对  $D$  内的任意分段光滑的有向简单闭曲线  $L$ , 都有  $\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0$ .

证 在单连通域  $D$  内, 对任意有向简单闭曲线  $L$ ,

$$\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0$$

的充分必要条件是, 对任意的  $(x, y) \in D$ , 有

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}[yf(x, y)] - \frac{\partial}{\partial x}[-xf(x, y)]$$

$$= 2f(x, y) + yf'_2(x, y) + xf'_1(x, y). (*)$$

由于对任意的  $(x, y) \in D$  及  $t > 0$ , 都有

$$f(tx, ty) = t^{-2} f(x, y),$$

两边对  $t$  求导, 得

$$xf'_1(tx, ty) + yf'_2(tx, ty) = -2t^{-3} f(x, y).$$

在上式中令  $t=1$ , 得

$$2f(x, y) + xf'_1(x, y) + yf'_2(x, y) = 0,$$

(\*) 式成立. 所以结论成立.

17. (1991. I, II) 在过点  $O(0, 0)$  和  $A(\pi, 0)$  的曲线族  $y = a \sin x (a > 0)$  中, 求一条曲线  $L$ , 使沿该曲线  $L$  从  $O$  到  $A$  的积分  $\int_L (1 + y^3) dx + (2x + y) dy$  的值最小.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad I(a) &= \int_0^\pi [1 + a^3 \sin^3 x + (2x + a \sin x) \cdot a \cos x] dx \\ &= \pi - 4a + \frac{4}{3} a^3. \end{aligned}$$

令  $I'(a) = -4 + 4a^2 = 0$ , 得  $a=1$  (舍去  $a=-1$ ), 且  $a=1$  是  $I(a)$  在区间  $(0, +\infty)$  内的惟一驻点, 又  $I''(1) = 8 > 0$ , 因此  $I(a)$  在  $a=1$  处取得最小值. 从而所求曲线为  $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$ .

18. (2005. I) 设函数  $\varphi(y)$  具有连续导数, 在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线  $L$  上, 曲线积分

$$\oint_L \frac{\varphi(y) dx + 2xy dy}{2x^2 + y^4}$$

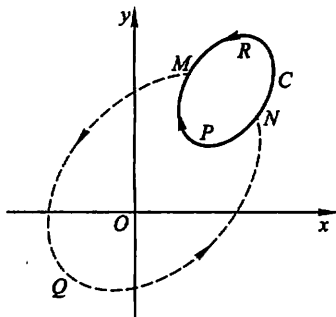
的值恒为同一常数.

(I) 证明: 对右半平面  $x > 0$  内的任意分段光滑简单闭曲线  $C$ , 有

$$\oint_C \frac{\varphi(y) dy + 2xy dy}{2x^2 + y^4} = 0;$$

(II) 求函数  $\varphi(y)$  的表达式.

(I) 证 如图研 7-5, 设  $C$  是半平面  $x > 0$  内的任一分段光滑简单闭曲线, 在  $C$  上任意取定两点  $M, N$ , 作围绕原点的闭曲线  $\widehat{MQNRM}$ , 同时得到另一围绕原点的闭曲线  $\widehat{MQNPM}$ . 根据题设, 有



图研 7-5

$$\oint_{\widehat{MQNRM}} \frac{\varphi(y) dx + 2xy dy}{2x^2 + y^4} - \oint_{\widehat{MQNPM}} \frac{\varphi(y) dx + 2xy dy}{2x^2 + y^4}$$

$$\left( \oint_{\overrightarrow{MQNRM}} - \oint_{\overrightarrow{MQNPM}} \right) \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}, \text{下同} = 0.$$

根据第二类曲线积分的性质,再利用上式可得

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} &= \left( \int_{\overrightarrow{NRM}} + \int_{\overrightarrow{MPN}} \right) \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} \\ &= \left( \int_{\overrightarrow{NRM}} - \int_{\overrightarrow{NPM}} \right) \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} \\ &= \left[ \left( \int_{\overrightarrow{MQN}} + \int_{\overrightarrow{NRM}} \right) - \left( \int_{\overrightarrow{MQN}} + \int_{\overrightarrow{NPM}} \right) \right] \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} \\ &= \left( \oint_{\overrightarrow{MQNRM}} - \oint_{\overrightarrow{MQNPM}} \right) \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0. \end{aligned}$$

(II) 解 设  $P = \frac{\varphi(y)}{2x^2 + y^4}$ ,  $Q = \frac{2xy}{2x^2 + y^4}$ ,  $P, Q$  在单连通区域  $x > 0$  内具有一阶连续偏导数. 由(I)知, 曲线积分  $\int_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$  在该区域内与路径无关, 故当  $x > 0$  时, 恒有  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ .

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y(2x^2 + y^4) - 4x \cdot 2xy}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{-4x^2y + 2y^5}{(2x^2 + y^4)^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\varphi'(y)(2x^2 + y^4) - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{2x^2\varphi'(y) + \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2},$$

比较上列两式的右端, 要使它们恒等, 需有

$$\varphi'(y) = -2y \quad \text{和} \quad \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3 = 2y^5.$$

由  $\varphi'(y) = -2y$  得  $\varphi(y) = -y^2 + C$ , 代入第二式得

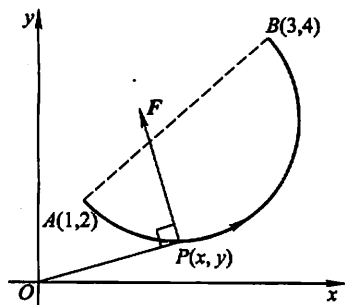
$$\varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3 = -2y^5 + 4y^5 - 4Cy^3 = 2y^5,$$

因此  $C=0$ , 从而得  $\varphi(y) = -y^2$ .

19. (1990. I, II) 质点  $P$  沿着以  $AB$  为直径的半圆周, 从点  $A(1, 2)$  运动到点  $B(3, 4)$  的过程中受变力  $F$  的作用(图研 7-6),  $F$  的大小等于点  $P$  与原点  $O$  之间的距离, 其方向垂直于线段  $OP$ , 且与  $y$  轴正向的夹角小于  $\frac{\pi}{2}$ . 求变力  $F$  对质点  $P$  所作的功.

$$\text{解 } \overrightarrow{OP} = xi + yj,$$

按题意,  $|F| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .



图研 7-6

由于  $\vec{F}$  与  $\vec{OP}$  垂直且与  $y$  轴正向夹角小于  $\frac{\pi}{2}$ , 故  $\vec{F}$  在  $y$  轴上的投影为正, 因此与  $\vec{F}$  同方向的单位向量为

$$\vec{e}_F = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

于是

$$\vec{F} = |\vec{F}|\vec{e}_F = -y\vec{i} + x\vec{j}.$$

又圆弧  $\widehat{AB}$  的参数方程为  $x = 2 + \sqrt{2}\cos t, y = 3 + \sqrt{2}\sin t$  ( $t$  从  $-\frac{3}{4}\pi$  变到  $\frac{\pi}{4}$ ), 因此变力  $\vec{F}$  所作的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy \\ &= \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} [(3 + \sqrt{2}\sin t)\sqrt{2}\sin t + (2 + \sqrt{2}\cos t)\sqrt{2}\cos t] dt \\ &= 3\sqrt{2} \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \sin t dt + 2\sqrt{2} \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt + 2 \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} dt \\ &= 2(\pi - 1). \end{aligned}$$

注 也可以利用格林公式来计算  $\int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy$ . 为此添加有向线段  $BA: y = x + 1, x$  从 3 变到 1. 由格林公式得

$$\oint_{\widehat{AB}+BA} -ydx + xdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2\pi;$$

$$\text{而} \quad \int_{BA} -ydx + xdy = \int_3^1 [-(x+1) + x] dx = 2,$$

$$\text{因此} \quad W = \int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy = 2\pi - 2 = 2(\pi - 1).$$

20. (1992. I, II) 在变力  $\vec{F} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$  的作用下, 质点由原点沿直线运动到椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  上第一卦限的点  $M(\xi, \eta, \zeta)$ , 问  $\xi, \eta, \zeta$  取何值时, 力  $\vec{F}$  所作的功  $W$  最大? 并求  $W$  的最大值.

解 直线段  $OM$  的参数方程可取为

$$x = \xi t, y = \eta t, z = \zeta t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 1.$$

$\vec{F}$  所作的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_{OM} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{OM} yz dx + zx dy + xy dz \\ &= \int_0^1 3\xi\eta\zeta t^2 dt = \xi\eta\zeta. \end{aligned}$$

下面求  $W = \xi\eta\zeta$  在条件  $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$  ( $\xi \geq 0, \eta \geq 0, \zeta \geq 0$ ) 下的最大值.

$$\text{令 } L(\xi, \eta, \zeta) = \xi\eta\zeta + \lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1\right),$$

由  $\frac{\partial L}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0, \frac{\partial L}{\partial \zeta} = 0$  得

$$\eta\zeta = -\frac{2\lambda}{a^2}\xi, \xi\zeta = -\frac{2\lambda}{b^2}\eta, \xi\eta = -\frac{2\lambda}{c^2}\zeta.$$

若  $\lambda = 0$ , 则由  $\eta\zeta = 0$  得  $\eta = 0$  或  $\zeta = 0$ , 从而

$$W = \xi\eta\zeta = 0 \quad (\text{显然不是 } W \text{ 的最大值, 舍去});$$

若  $\lambda \neq 0$ , 则得

$$\frac{\xi^2}{a^2} = \frac{\eta^2}{b^2} = \frac{\zeta^2}{c^2} \left( = -\frac{\xi\eta\zeta}{2\lambda} \right),$$

从而  $\frac{\xi^2}{a^2} = \frac{\eta^2}{b^2} = \frac{\zeta^2}{c^2} = \frac{1}{3}$ . 于是得惟一可能极值点:

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{3}}, \eta = \frac{b}{\sqrt{3}}, \zeta = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

由问题的实际意义知功的最大值为

$$W_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{9}abc.$$

21. (1999. I) 求  $I = \int_L (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy$ , 其中

$a, b$  为正的常数,  $L$  为从点  $A(2a, 0)$  沿曲线  $y = \sqrt{2ax - x^2}$  到点  $O(0, 0)$  的弧.

解法一 添加从点  $O(0, 0)$  沿  $y = 0$  到点  $A(2a, 0)$  的有向线段  $L_1$ , 则由格林公式得

$$\begin{aligned} & \oint_{L+L_1} (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (b-a) d\sigma = \frac{\pi}{2} a^2 (b-a), \end{aligned}$$

其中  $D$  为由  $L$  和  $L_1$  所围成的半径为  $a$  的半圆域.

$$\begin{aligned} \text{又 } & \int_{L_1} (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy \\ &= \int_0^{2a} (-bx)dx = -2a^2b, \end{aligned}$$

$$\text{从而 } I = \frac{\pi}{2} a^2 (b-a) - (-2a^2b) = \left( \frac{\pi}{2} + 2 \right) a^2 b - \frac{\pi}{2} a^3.$$

解法二 将  $I$  写成两个积分之差:

$$I = \int_L e^x \sin y dx + e^x \cos y dy - \int_L b(x+y) dx + ax dy,$$



前一积分与路径无关,故可将  $L$  改为有向线段  $AO: y=0, x$  从  $2a$  变到  $0$ , 得

$$\int_L e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = \int_{2a}^0 e^x \cdot 0 dx = 0;$$

对后一积分,取  $L$  的参数方程:  $x = a + a \cos t, b = a \sin t, t$  从  $0$  变到  $\pi$ , 得

$$\begin{aligned} I &= 0 - \int_0^\pi [b(a + a \cos t + a \sin t)(-a \sin t) + a(a + a \cos t)(a \cos t)] dt \\ &= \int_0^\pi (a^2 b \sin t + a^2 b \sin t \cos t + a^2 b \sin^2 t - a^3 \cos t - a^3 \cos^2 t) dt \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) a^2 b - \frac{\pi}{2} a^3. \end{aligned}$$

22. (2000. I) 计算曲线积分  $I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$ , 其中  $L$  是以点  $(1, 0)$  为中心,  $R$  为半径的圆周 ( $R > 1$ ), 取逆时针方向.

解  $P = \frac{-y}{4x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{4x^2 + y^2}.$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, (x, y) \neq (0, 0).$$

在  $L$  所围的圆域内作足够小的椭圆  $C: x = \frac{r}{2} \cos t, y = r \sin t (r > 0), t$  从  $0$  变到  $2\pi$ . 于是在由  $L$  和  $C^-$  所围成的区域  $D$  上应用格林公式, 得

$$\oint_{L+C^-} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = 0,$$

从而有

$$\begin{aligned} I &= \oint_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = \oint_C \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{r^2} dt = \pi. \end{aligned}$$

23. (2001. I) 计算  $I = \oint_L (y^2 - z^2) dx + (2z^2 - x^2) dy + (3x^2 - y^2) dz$ , 其中  $L$  是平面  $x + y + z = 2$  与柱面  $|x| + |y| = 1$  的交线, 从  $z$  轴正向看去,  $L$  为逆时针方向.

解 记  $\Sigma$  为平面  $x + y + z = 2$  的上侧被  $L$  所围成的部分, 则  $\Sigma$  上各点处的法向量的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$\Sigma$  在  $xOy$  面上的投影区域  $D_{xy} = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}.$

由斯托克斯公式,

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \\
 &= \iint_S \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & 2z^2 - x^2 & 3x^2 - y^2 \end{vmatrix} dS \\
 &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (4x + 2y + 3z) dS \\
 &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{D_{xy}} (x - y + 6) \sqrt{3} dx dy \quad (\text{由对称性易知} \iint_D (x - y) dx dy = 0) \\
 &= -12 \iint_{D_{xy}} dx dy = -24.
 \end{aligned}$$

24. (1999. I) 设  $S$  为椭球面  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$  的上半部分, 点  $P(x, y, z) \in S$ ,  $\Pi$  为  $S$  在点  $P$  处的切平面,  $\rho(x, y, z)$  为点  $O(0, 0, 0)$  到平面  $\Pi$  的距离, 求  $\iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS$ .

解 设  $(X, Y, Z)$  为切平面  $\Pi$  上任意一点, 则  $\Pi$  的方程为  $\frac{xX}{2} + \frac{yY}{2} + zZ = 1$ , 原点  $O(0, 0, 0)$  到  $\Pi$  的距离  $\rho(x, y, z) = (\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ .

由于  $S$  的方程为  $z = \sqrt{1 - (\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2})}$ , 故

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{2\sqrt{1 - (\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2})}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{2\sqrt{1 - (\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2})}},$$

于是

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} d\sigma = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2\sqrt{1 - (\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2})}} d\sigma.$$

又  $S$  在  $xOy$  面上的投影区域  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$ , 从而

$$\begin{aligned}
 \iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS &= \frac{1}{4} \iint_D (4 - x^2 - y^2) d\sigma \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (4 - \rho^2) \rho d\rho = \frac{3}{2} \pi.
 \end{aligned}$$

25. (1987. I, II) 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (8y+1)xdydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzdxdy,$$

其中  $\Sigma$  是由曲线  $\begin{cases} z = \sqrt{y-1}, \\ x = 0 \end{cases} (1 \leq y \leq 3)$  绕  $y$  轴旋转一周所成的曲面, 它的法向量与  $y$  轴正向的夹角恒大于  $\frac{\pi}{2}$ .

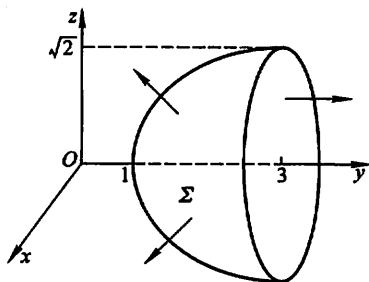


图 7-7

解 设  $\Sigma_1$  为平面  $y=3$  的右侧被  $x^2 + z^2 = 2$  所围成的部分(图 7-7),  $\Omega$  为由  $\Sigma$  和  $\Sigma_1$  所围成的空间闭区域, 则由高斯公式得

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(8y+1)x] + \frac{\partial}{\partial y} [2(1-y^2)] + \frac{\partial}{\partial z} (-4yz) \right\} dv \\ &\quad - \iint_{\Sigma_1} (8y+1)xdydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzdxdy \\ &= \iiint_{\Omega} dv - \iint_{\Sigma_1} 2(1-y^2)dzdx \\ &= \int_1^3 \pi(y-1)dy - \iint_{x^2+z^2 \leq 2} 2(1-3^2)dzdx \\ &= 2\pi + 32\pi = 34\pi. \end{aligned}$$

26. (2000. I) 对于半空间  $x > 0$  内任意的光滑有向封闭曲面  $S$ , 都有

$$\oiint_S xf(x)dydz - xyf(x)dzdx - e^{2x}z dxdy = 0,$$

其中函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内具有连续的一阶导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ . 求  $f(x)$ .

解 由题设和高斯公式得

$$\begin{aligned} 0 &= \oiint_S xf(x)dydz - xyf(x)dzdx - e^{2x}z dxdy \\ &= \pm \iiint_{\Omega} [xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x}]dv, \end{aligned}$$

其中  $\Omega$  为由  $S$  围成的有界闭区域, 当  $S$  取外侧时, 取“+”号, 当  $S$  取内侧时, 取“-”号. 由  $S$  的任意性及  $f(x)$ 、 $f'(x)$  的连续性, 可知必有

$$xf'(x) + f(x) - xf(x) - e^{2x} = 0 \quad (x > 0),$$

即 
$$f'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)f(x) = \frac{1}{x}e^{2x} \quad (x > 0).$$

按一阶线性非齐次微分方程通解公式(教材上册第七章第四节), 有

$$f(x) = e^{\int (1-\frac{1}{x}) dx} \left[ \int \frac{1}{x} e^{2x} \cdot e^{\int (\frac{1}{x}-1) dx} dx + C \right]$$

$$= \frac{e^x}{x} \left[ \int \frac{1}{x} e^{2x} \cdot x e^{-x} dx + C \right] = \frac{e^x}{x} (e^x + C).$$

由于  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} + Ce^x}{x} = 1$ , 故必有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{2x} + Ce^x) = 0,$$

从而  $C = -1$ . 于是

$$f(x) = \frac{e^x}{x} (e^x - 1).$$

## (八) 无穷级数

1. (1988. I, II) 设  $f(x)$  是周期为 2 的周期函数, 它在区间  $(-1, 1]$  上的定义为

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

则  $f(x)$  的傅里叶级数在  $x = 1$  处收敛于\_\_\_\_\_.

解  $x = 1$  是  $f(x)$  的间断点, 故级数在该点处收敛于  $\frac{f(1^-) + f(-1^+)}{2} = \frac{3}{2}$ .

2. (1993. I, II) 设函数  $f(x) = \pi x + x^2$  ( $-\pi < x < \pi$ ) 的傅里叶级数展开式为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则其中系数  $b_3$  的值为\_\_\_\_\_.

$$\text{解 } b_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin 3x dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi x + x^2) \sin 3x dx,$$

其中  $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin 3x dx = 0$ , 故

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi x \sin 3x dx = 2 \int_0^{\pi} x \sin 3x dx \\ &= -\frac{2}{3} [x \cos 3x]_0^{\pi} + \frac{2}{3} \int_0^{\pi} \cos 3x dx = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

3. (1995. I, II) 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1}$  的收敛半径  $R =$ \_\_\_\_\_.

解 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{|2^n + (-3)^n|}{|2^{n+1} + (-3)^{n+1}|} |x|^2 = \frac{|x|^2}{3}$ , 从  $\frac{|x|^2}{3} < 1$  得  $|x| < \sqrt{3}$ , 故  $R = \sqrt{3}$ .

4. (1997. I) 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为 3, 则幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$  的收敛区间为\_\_\_\_\_.

解 由幂级数的性质知  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1}$  及  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$  的收敛半

径相同,故幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n+1}$  的收敛区间为  $|x-1| < 3$ , 即  $(-2, 4)$ .

5. (1988. I, II) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$  在  $x = -1$  处收敛, 则此级数在  $x = 2$  处 ( ).

- (A) 条件收敛. (B) 绝对收敛.  
(C) 发散. (D) 收敛性不能确定.

解 (1) 因为  $x = -1$  是级数的收敛点, 由阿贝尔 (Abel) 定理知, 在  $|x-1| < |-1-1| = 2$  内, 级数绝对收敛. 现  $x = 2$  满足  $|x-1| < 2$ , 故选 (B).

6. (1989. I, II) 设  $f(x) = x^2, 0 \leq x < 1$ , 而正弦级数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, \text{ 其中 } b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

则  $S(-\frac{1}{2}) = ( )$ .

- (A)  $-\frac{1}{2}$ ; (B)  $-\frac{1}{4}$ ; (C)  $\frac{1}{4}$ ; (D)  $\frac{1}{2}$ .

解 由  $b_n$  的表达式可推知,  $S(x)$  是  $f(x)$  在  $(-1, 0)$  上作奇延拓后所得函数的傅里叶级数的和函数.  $x = -\frac{1}{2}$  是奇延拓后所得函数的连续点, 故  $S(-\frac{1}{2}) = -S(\frac{1}{2}) = -f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ . 故选 (B).

7. (1990. I, II) 设  $a$  为常数, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\sin(na)}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$  ( ).

- (A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.  
(C) 发散. (D) 收敛性与  $a$  的取值有关.

解 因  $|\sin(na)| \leq 1$ , 故由比较审敛法知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n^2}$  绝对收敛, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  发散, 故所给级数发散. 选 (C).

8. (1994. I, II) 设常数  $\lambda > 0$  且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}}$  ( ).

- (A) 发散. (B) 条件收敛.  
(C) 绝对收敛. (D) 收敛性与  $\lambda$  有关.

解 因  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \lambda}$  收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n^2 + \frac{1}{n^2 + \lambda} \right)$  收敛.

又  $\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}} \leq \frac{1}{2} \left( a_n^2 + \frac{1}{n^2+\lambda} \right)$ , 由比较审敛法知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$  收敛, 故所给级数绝对收敛. 选(C).

9. (1996. I, II) 设  $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 常数  $\lambda \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( n \tan \frac{\lambda}{n} \right) a_{2n}$  ( ).
- (A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.  
(C) 发散. (D) 收敛性与  $\lambda$  有关.

解 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛于  $S$ , 则正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$  的部分和显然不超过  $S$ , 故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$  收敛. 又  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \tan \frac{\lambda}{n} a_{2n}}{a_{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{\lambda}{n}}{\frac{\lambda}{n}} \cdot \lambda = \lambda$ , 由比较审敛法知  $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\lambda}{n} a_{2n}$  收敛. 故选(A).

10. (2000. I) 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则必收敛的级数为( ).

- (A)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ . (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ .  
(C)  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ . (D)  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ .

解  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则  $\sum_{n=2}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$  也收敛, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$  必收敛. 故选(D). 下面各举一例说明级数(A)(B)(C)不必收敛. 如:

(A) 中取  $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)}$  发散(见下面的说明).

(B) 中取  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散.

(C) 中取  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right)$  发散.

(A) 中提及  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)}$  发散是这样证明的: 注意到函数  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

在  $(1, +\infty)$  单调减少, 有  $\frac{1}{n \ln n} > \frac{1}{x \ln x}, x \in (n, n+1)$ .

因而有  $\frac{1}{n \ln n} = \int_n^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx > \int_n^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx$ .

于是  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)}$  的部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \ln(k+1)} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} > \sum_{k=1}^n \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{x \ln x} dx \\ &= \int_2^{n+2} \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln \ln x]_2^{n+2} = \ln[\ln(n+2)] - \ln(\ln 2), \end{aligned}$$

因部分和无界, 故级数发散.

11. (2002. I) 设  $u_n \neq 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$ , 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right) \quad (\quad).$$

(A) 发散.

(B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛.

(D) 收敛性根据所给条件不能判定.

解 应选(C).

首先可以用特例来排除(A)与(B), 依条件取  $u_n = n$ , 则由莱布尼茨判别法

知  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{u_n}$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{u_{n+1}}$  均收敛, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$  收敛,

这就排除了(A); 又  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}$  发散, 这就排除了(B).

要证明(C)是正确的, 考察级数的前  $n$  项部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \left( \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) - \left( \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} \right) + \left( \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} \right) - \dots + (-1)^{n+1} \left( \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{u_1} + (-1)^{n+1} \frac{1}{u_{n+1}}, \end{aligned}$$

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$ , 说明  $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{n} (n \rightarrow \infty)$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{u_{n+1}} = 0$ ,

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{u_1}$ ,

因此, 级数收敛且条件收敛.

12. (2003. I) 设  $x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx (-\pi \leq x \leq \pi)$ , 则  $a_2 =$  \_\_\_\_\_.

解  $a_2$  是偶函数  $x^2$  的周期为  $2\pi$  的傅里叶级数中对应于  $\cos 2x$  的系数, 故

$$a_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx = \frac{1}{\pi} (x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \sin 2x dx)$$



$$= \frac{1}{\pi} (x \cos 2x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos 2x dx) \\ = 1.$$

13. (2003. III) 设  $p_n = \frac{a_n + |a_n|}{2}$ ,  $q_n = \frac{a_n - |a_n|}{2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 则下列命题中正确的是( ).

- (A) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$  都收敛.  
 (B) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$  都收敛.  
 (C) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$  的敛散性都不定.  
 (D) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$  的敛散性都不定.

解 应选(B). 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛, 有  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$  都收敛, 同时排除了(D). 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  发散, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$  都发散, 因此排除了(A)与(C).

14. (2004. III) 设有以下命题:

- ① 若  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.  
 ② 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+100}$  收敛.  
 ③ 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.  
 ④ 若  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  都收敛.

则以上命题中正确的是( ).

- (A) ① ②. (B) ② ③. (C) ③ ④. (D) ① ④.

解 应选(B). 因为 ① 与 ④ 中两个收敛级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$  取  $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$  时, 不难看出 ①、④ 的结论都是不成立的. 由于级数添加或去除有限项后, 不改变级数的收敛性, 故 ② 是正确的.

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ , 说明自某项起有  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ , 即  $u_{n+1} > u_n$ , 从而  $u_n \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 故  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散, ③ 是正确的.

15. (2004. I) 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是正项级数, 下列结论中正确的是( ).

(A) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

(B) 若存在非零常数  $\lambda$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = \lambda$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

(C) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$ .

(D) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 则存在非零常数  $\lambda$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = \lambda$ .

解 应选(B), 这是极限形式的比较审敛法的一个常用结论.

取  $a_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  可排除(C); 取  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , 可排除(D); 至于排除(A)的例子, 可取

$a_n = \frac{1}{n \ln n} (n = 2, 3, \dots)$ , 由于

$$a_n = \frac{1}{n \ln n} > \int_n^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx,$$

故部分和

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n > a_1 + \int_2^3 \frac{1}{x \ln x} dx + \int_3^4 \frac{1}{x \ln x} dx + \dots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx \\ &= a_1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx, \end{aligned}$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^{n+1} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \ln x \Big|_2^{n+1} = +\infty,$$

说明部分和  $s_n$  无界, 因此级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  发散, 从而(A)是错误的.

16. (1994. I, II) 设  $f(x)$  在点  $x=0$  的某一邻域内具有二阶连续导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ , 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$  绝对收敛.

证 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$  可推知  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . 由于  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 故有  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 从而  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ . 于是  $f(x)$  在  $x=0$  的某一邻域可用泰勒公式表为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\theta x)}{2}x^2 = \frac{f''(\theta x)}{2}x^2 \quad (0 < \theta < 1).$$

又因  $f''(x)$  在该邻域内连续, 故必在该邻域的某闭区间  $[-\delta, \delta]$  上有界, 即当  $x \in [-\delta, \delta]$  时,  $|f''(x)| \leq M$ , 于是  $|f(x)| \leq \frac{M}{2}x^2$ . 当  $n$  充分大后,  $x =$

$\frac{1}{n} \in [-\delta, \delta]$ , 就有

$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2} \frac{1}{n^2}.$$

因为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 有  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{2} \frac{1}{n^2}$  收敛, 由比较审敛法知  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$  收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$  绝对收敛.

17. (1989. I, II) 将函数  $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$  展为  $x$  的幂级数.

解 因  $f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, -1 < x < 1$ ,

$$\text{故 } f(x) - f(0) = \int_0^x f'(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

$$\text{又 } f(0) = \arctan \frac{1+0}{1-0} = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{因此 } f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, -1 < x < 1.$$

由于上式右端的幂级数在  $x = -1$  处收敛, 且  $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$  在  $x = -1$  处连续, 故

$$\arctan x = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, -1 \leq x < 1.$$

18. (1993. I, II) 求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n}$  的和.

解 所给级数是幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n + 1)x^n$  中  $x$  取  $-\frac{1}{2}$  的情形. 易见  $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n + 1)x^n$  的收敛域为  $(-1, 1)$ , 记和函数为  $S(x)$ , 于是  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n} = S\left(-\frac{1}{2}\right)$ . 下面求  $S(x)$ .

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n + 1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n + \frac{1}{1-x} \\ &= x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

设  $\varphi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$ , 则

$$\int_0^x \varphi(x) dx = \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1},$$

$$\int_0^x \left[ \int_0^x \varphi(x) dx \right] dx = \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x}, \quad -1 < x < 1.$$

于是 
$$\varphi(x) = \left( \frac{x^2}{1-x} \right)' = \frac{2}{(1-x)^3},$$

从而 
$$S(x) = x^2 \varphi(x) + \frac{1}{1-x} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{1}{1-x}.$$

所以原级数的和为 
$$S\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{27} + \frac{2}{3} = \frac{22}{27}.$$

19. (1995. I, II) 将  $f(x) = x-1 (0 \leq x \leq 2)$  展开成周期为 4 的余弦级数.

解 先将  $f(x)$  在  $(-2, 0)$  作偶延拓, 再以 4 为周期作周期延拓得  $F(x)$ , 则  $F(x)$  满足收敛定理的条件是处处连续, 在  $[0, 2]$  上  $F(x) \equiv f(x)$ .

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 (x-1) dx = 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 (x-1) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^2 (x-1) d\left(\sin \frac{n\pi x}{2}\right) \\ &= -\frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{4}{(n\pi)^2} \left[ \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} \frac{-8}{(2k-1)^2 \pi^2}, & n = 2k-1 \quad (k = 1, 2, \dots) \\ 0, & n = 2k \end{cases} \end{aligned}$$

故

$$f(x) = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2}, \quad x \in [0, 2].$$

20. (1997. I) 设  $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) (n = 1, 2, \dots)$ . 证明:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在; (2) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$  收敛.

证 (1) 显然  $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ , 且

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) - a_n = \frac{1 - a_n^2}{2a_n} \leq 0.$$

故  $a_n$  是单调递减有下界的数列, 从而必有极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

(2) 由(1)知  $0 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} \leq a_n - a_{n+1}$ , 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$  为正

项级数. 又若  $S_n$  是  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$  的部分和, 则

$$S_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1},$$

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  存在, 即级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$  收敛. 由比较审敛法知

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$  收敛.

21. (1999. I) 设  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ , (1) 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2})$  的和;

(2) 试证: 对任意常数  $\lambda > 0$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$  收敛.

$$\begin{aligned} (1) \text{ 解 } \text{ 由于 } a_n + a_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \sec^2 x dx \\ &= \frac{1}{n+1} [\tan^{n+1} x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\text{于是 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

(2) 证 因  $a_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$ , 且  $a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ , 有

$$\frac{a_n}{n^\lambda} < \frac{a_n + a_{n+2}}{n^\lambda} = \frac{1}{n^\lambda(n+1)} < \frac{1}{n^{1+\lambda}},$$

而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\lambda}}$  收敛, 故由比较审敛法知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$  收敛.

22. (1998. I) 设正项数列  $\{a_n\}$  单调减少, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  发散, 试问

$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{a_n + 1} \right)^n$  是否收敛? 并说明理由.

解 级数收敛.

由于  $a_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$  并且单调减少, 故必有极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 且  $a \geq 0$ . 若

$a = 0$ , 则由莱布尼茨定理知  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  收敛, 与条件矛盾, 故  $a > 0$ .

因为  $a_n \geq a > 0$ , 故

$$\left( \frac{1}{a_n + 1} \right)^n \leq \left( \frac{1}{a + 1} \right)^n.$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{a + 1} \right)^n$  收敛, 故由比较审敛法知  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{a_n + 1} \right)^n$  收敛.

23. (2001, I) 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$  试将  $f(x)$  展开成  $x$

的幂级数, 并求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$  的和.

解 因为

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int_0^x (\arctan x)' dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^x \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right] dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in [-1, 1], \end{aligned}$$

所以 
$$\frac{\arctan x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}, x \in [-1, 0) \cup (0, 1],$$

于是

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right] x^{2n} \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} x^{2n}, x \in [-1, 0) \cup (0, 1]. \end{aligned}$$

由于当  $x=0$  时上式右端取值为 1, 而由题设,  $f(0)=1$ , 故

$$f(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} x^{2n}, x \in [-1, 1].$$

令  $x=1$ , 得 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{2} [f(1) - 1] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

24. (2003, III) 求幂级数  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$  ( $|x| < 1$ ) 的和函数  $f(x)$  及其极值.

解 
$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n} \quad (|x| < 1),$$

则  $f(0)=1$ , 且

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n-1} = -\frac{x}{1+x^2}.$$

上式两端从 0 到  $x$  积分, 得

$$f(x) - f(0) = -\int_0^x \frac{x}{1+x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2),$$

即

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

令  $f'(x) = 0$ , 得唯一驻点  $x=0$ . 由于  $f''(x) = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$ ,  $f''(0) < 0$ , 故  $f(x)$  在  $x=0$  取得极大值  $f(0)=1$ .

25. (2005. I) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[ 1 + \frac{1}{n(2n-1)} \right] x^{2n}$  的收敛区间与和函数  $f(x)$ .

解 令  $t = x^2$ , 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[ 1 + \frac{1}{n(2n-1)} \right] t^n$  的收敛半径

$$R' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n(2n-1)}}{1 + \frac{1}{(n+1)(2n+1)}} = 1,$$

故原级数的收敛半径  $R = \sqrt{R'} = 1$ , 从而收敛区间为  $(-1, 1)$ .

容易得出  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{x^2}{1+x^2}, x \in (-1, 1)$ .

记  $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(2n-1)} x^{2n}$ , 则  $\varphi(0) = 0$ , 且

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{2n-1} x^{2n-1}, \text{ 且 } \varphi'(0) = 0,$$

$$\varphi''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2x^{2n-2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{2}{1+x^2}, x \in (-1, 1).$$

于是对  $x \in (-1, 1)$ , 从 0 到  $x$  作积分得

$$\varphi'(x) = \int_0^x \varphi''(x) dx = 2 \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \arctan x,$$

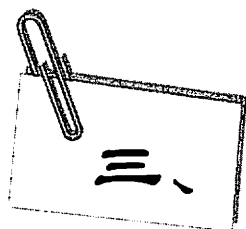
$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(x) dx = 2 \int_0^x \arctan x dx$$

$$= 2 \left( x \arctan x - \int_0^x \frac{x}{1+x^2} dx \right)$$

$$= 2x \arctan x - \ln(1+x^2).$$

因此

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} + 2x \arctan x - \ln(1+x^2), x \in (-1, 1).$$



# 同济大学高等数学 试卷选编



THE UNIVERSITY OF CHICAGO  
LIBRARY

# (一) 高等数学(下)期中考试试卷(I)

## 试 题

### 一、填空、选择题

1. 如果函数  $f(x, y)$  满足如下条件中的 \_\_\_\_\_, 则该函数在点  $(x_0, y_0)$  处连续.

(A)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$  且  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$ .

(B)  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处沿  $l$  方向有  $\frac{\partial f}{\partial l}$ .

(C)  $f(x, y)$  有偏导数  $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ .

(D)  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处可微分.

2. 设函数  $f(x, y, z)$  可微分且  $f_x(0, 0, 0) = 1, f_y(0, 0, 0) = 2, f_z(0, 0, 0) = 3$ .

如果  $u = f(x, \sin x, \tan x)$ , 则  $\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} =$  \_\_\_\_\_.

3. 如果函数  $f(x, y) = x^y$  在点  $(1, 1)$  处沿某方向  $l$  取得最大增长率, 则  $l =$  \_\_\_\_\_.

4. 设曲面  $\Sigma$  由曲线  $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$  绕  $x$  轴旋转而成, 则  $\Sigma$  在点  $(1, 1, 1)$  处的单位法向量为 \_\_\_\_\_.

5. 曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$  在点  $(1, 1, -1)$  处的切线的对称式方程是 \_\_\_\_\_.

6. 设  $f(x, y)$  为连续函数, 若交换积分次序, 则  $\int_0^2 dx \int_{x^2-2x}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy =$  \_\_\_\_\_.

二、设  $f(x-y, \ln x) = \left(1 - \frac{y}{x}\right) \frac{e^{x-y}}{x \ln x}$ , 写出  $f(x, y)$  的表达式并求  $\frac{\partial f}{\partial x}$  与

$\frac{\partial f}{\partial y}$ .

三、设二元函数  $f$  有连续的偏导数, 又函数  $z = z(x, y)$  由方程  $x^2 + y^2 + z^2 = f(xy, z)$  确定, 求全微分  $dz$ .

四、设  $\begin{cases} x+y=u+v, \\ x\sin v=y\sin u, \end{cases}$  求  $\frac{\partial u}{\partial x}$  与  $\frac{\partial v}{\partial x}$ .

五、在八分之一球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$  上求一点, 使得函数  $f(x, y, z) = xyz^3$  达到最大, 并写出该最大值.

六、设  $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & |y| > |x|, \\ xy, & \text{其他}, \end{cases}$  计算二重积分  $I = \iint_D f(x, y) d\sigma$ , 其中  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ .

七、设  $\Omega$  是球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  与球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2ax$  的交集, 它的密度为  $\mu(x, y, z) = z$  (单位省略). 求  $\Omega$  的质量  $M$ .

八、设曲线  $\Gamma$  的方程为  $x=t, y=-t^2, z=t^3$ .

(1) 写出  $\Gamma$  的所有与平面  $3y+2z=6$  平行的切线方程;

(2) 这些切线之间的距离是多少?

## 参 考 答 案

一、1. 由于可微必连续. 故选(D).

2.  $\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = [f_x(x, \sin x, \tan x) + \cos x f_y(x, \sin x, \tan x) + \sec^2 x f_z(x, \sin x, \tan x)]_{x=0} = 6$ .

3.  $l = \text{grad } f(1, 1) = (f_x(1, 1), f_y(1, 1)) = (1, 0)$ .

4. 曲面  $\Sigma$  的方程为  $3x^2 - y^2 - z^2 = 1$ , 因此所求法向量为  $\pm(6x, -2y, -2z)|_{(1,1,1)} = \pm(6, -2, -2)$ , 其单位法向量为  $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$ .

5. 对  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$  两端求微分, 并代入点的坐标, 得

$$\begin{cases} dx + dy - dz = 0, \\ dx + dy + dz = 0, \end{cases}$$

故  $dx:dy:dz=1:-1:0$ , 因此切线的方向向量为  $(1, -1, 0)$ , 所求切线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0}.$$

6.  $\int_0^2 dx \int_{x^2-2x}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_{1-\sqrt{y+1}}^{1+\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx$ .

二、记  $x-y=u, \ln x=v$ , 则  $x=e^v, y=e^v-u$ , 代入右端, 得

$$f(u, v) = \frac{u}{v} e^{v-2v},$$

即

$$f(x, y) = \frac{x}{y} e^{x-2y}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1+x}{y} e^{x-2y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x(1+2y)}{y^2} e^{x-2y}.$$

三、对  $x^2 + y^2 + z^2 = f(xy, z)$  两端求微分, 得

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = f'_1(ydx + xdy) + f'_2 dz,$$

即得

$$dz = \frac{(yf'_1 - 2x)dx + (xf'_1 - 2y)dy}{2z - f'_2} \quad (2z - f'_2 \neq 0).$$

四、方程两端对  $x$  求偏导, 得

$$\begin{cases} 1 = u_x + v_x, \\ \sin v + x(\cos v)v_x = y(\cos u)u_x, \end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x \cos v + \sin v}{x \cos v + y \cos u}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y \cos u - \sin v}{x \cos v + y \cos u}.$$

五、设  $F(x, y, z) = xyz^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 5r^2)$ , 令

$$F_x = yz^3 + 2\lambda x = 0,$$

$$F_y = xz^3 + 2\lambda y = 0,$$

$$F_z = 3xyz^2 + 2\lambda z = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2,$$

解得  $x = y = r, z = \sqrt{3}r$ . 即在  $(r, r, \sqrt{3}r)$  点处, 函数达到最大, 其最大值为

$$\max f = f(r, r, \sqrt{3}r) = 3\sqrt{3}r^5.$$

六、两直线  $|y| = |x|$  将  $D$  划分为有  $y$  轴穿过的上下四分之一圆盘记为  $D_1$  与  $D_2$ , 有  $x$  轴穿过的左右四分之一圆盘记为  $D_3$  与  $D_4$ , 则

$$I = \iint_{D_1+D_2} (x^2 + y^2) d\sigma + \iint_{D_3+D_4} xy d\sigma.$$

由对称性,  $\iint_{D_3+D_4} xy d\sigma = 0$ , 故

$$I = \iint_{D_1+D_2} (x^2 + y^2) d\sigma = 2 \iint_{D_1} (x^2 + y^2) d\sigma = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{4}.$$

七、 $\Omega$  在  $xOy$  面上的投影区域为  $D: x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}a^2$ . 因此

$$\begin{aligned}
 M &= \iiint_{\Omega} z \, dV = \iint_D dx dy \int_{a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z \, dz \\
 &= \frac{1}{2} \iint_D [2a\sqrt{a^2-x^2-y^2} - a^2] dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} [2a\sqrt{a^2-\rho^2} - a^2] \rho d\rho = \frac{5}{24}\pi a^4.
 \end{aligned}$$

八、(1)  $\tau = (1, -2t, 3t^2)$ ,  $n = (0, 3, 2)$ .

令  $\tau \cdot n = 0$ , 得  $t_1 = 0, t_2 = 1$ , 即

$$\tau_1 = (1, 0, 0), \tau_2 = (1, -2, 3).$$

所求切线方程为

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0} \text{ 与 } \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}.$$

(2) 取  $M_1(0, 0, 0), M_2 = (1, -1, 1), \overrightarrow{M_1 M_2} = (1, -1, 1)$ . 所求距离为

$$d = \frac{|(\tau_1 \times \tau_2) \cdot \overrightarrow{M_2 M_1}|}{|\tau_1 \times \tau_2|} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

## (二) 高等数学(下)期中考试试卷(II)

### 试 题

#### 一、填空、选择题

1. 函数  $z = \ln(1+x^2+y^2)$  在点  $(1,2)$  处的全微分是\_\_\_\_\_.
  2. 曲面  $\frac{x^2+y^2}{2} - z^2 = 1$  在点  $M(1,1,0)$  处的切平面方程是\_\_\_\_\_.
  3. 设  $f(x,y) = e^{xy} + x \ln y$ , 则  $\text{grad } f(1,2) =$ \_\_\_\_\_.
  4. 设  $f(x,y)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 则由积分中值定理, 在  $D$  上至少存在一点  $(\xi, \eta)$ , 使\_\_\_\_\_.
  5. 将二次积分  $I = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx$  交换积分次序, 得  $I =$ \_\_\_\_\_.
  6. 设  $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ , 则  $\iint_D \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right) dx dy =$ \_\_\_\_\_.
  7. 二元函数  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$  在点  $(0,0)$  处( ).  
(A) 连续、偏导数存在. (B) 连续、偏导数不存在.  
(C) 不连续、偏导数存在. (D) 不连续、偏导数不存在.
  8. 根据判定极值的充分条件, 函数  $f(x,y) = 2x^2 - xy + 3y^2 + 5$  在点  $(0,0)$  处( ).  
(A) 取得极大值. (B) 取得极小值.  
(C) 不取得极值. (D) 不能判定是否取得极值.
  9. 设  $f(x)$  为连续函数,  $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$ , 则  $F'(2) =$ \_\_\_\_\_.  
(A)  $f(2)$ . (B)  $2f(2)$ . (C)  $-f(2)$ . (D) 0.
- 二、设  $z = x^3 f\left(xy, \frac{y}{x}\right)$ ,  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial z}{\partial y}$  和  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

三、设有螺旋线  $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = \frac{4}{\pi}t$ .

(1) 求出螺旋线上点  $M(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$  处的指向朝下的单位切向量  $e_r$ ;

(2) 求出螺旋线上点  $M$  处的切线方程;

(3) 求函数  $u = x + 2y + 3z$  在点  $M$  处沿方向  $e_r$  的方向导数.

四、设闭曲面  $\Sigma$  的方程为  $F(x, y, z) = 0$ , 其中  $F(x, y, z)$  具有一阶连续偏导数且三个偏导数不同时为零. 点  $P(x_1, y_1, z_1)$  为  $\Sigma$  外一点. 若点  $Q(x_2, y_2, z_2)$  为  $\Sigma$  上离开点  $P$  最近的一点, 试用拉格朗日乘子法证明: 直线  $PQ$  为曲面  $\Sigma$  在点  $Q$  处的法线.

五、计算二重积分  $\iint_D (x^2 y^3 + e^x) dx dy$ , 其中  $D$  为由直线  $y = x, y = -x$  和  $x = 1$  所围成的闭区域.

六、计算三重积分  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$ , 其中  $\Omega$  为由锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$  和平面  $z = 1$  所围成的闭区域.

七、求过点  $M(-1, 0, 4)$  且平行于平面  $3x - 4y + z - 10 = 0$ , 又与直线  $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$  相交的直线的方程.

## 参 考 答 案

一、1.  $dz|_{(1,2)} = \left[ \frac{2x}{1+x^2+y^2} dx + \frac{2y}{1+x^2+y^2} dy \right] \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{3} dx + \frac{2}{3} dy$ .

2. 法向量为  $(x, y, -2z)|_{(1,1,0)} = (1, 1, 0)$ , 因此所求切平面方程为  $x + y - 2 = 0$ .

3.  $\text{grad } f(1, 2) = (f_x(1, 2), f_y(1, 2)) = (2e^2 + \ln 2, e^2 + \frac{1}{2})$ .

4.  $\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \sigma$ , 其中  $\sigma$  为区域  $D$  的面积.

5.  $I = \int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ .

6. 因为  $\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$ , 所以

$$\iint_D \left( \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \right) dx dy = \frac{5}{12} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{5}{12} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{5}{24} \pi R^4.$$

7. 因为  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{k}{1+k^2}$ , 所以  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  不存在. 又

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0,$$

故选(C).

8. 因为

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0, f_{xx}(0,0) = 4, f_{xy}(0,0) = -1, f_{yy}(0,0) = 6,$$

$$f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = 25 > 0,$$

故选(B).

9. 当  $t > 1$  时,

$$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx = \int_1^t dx \int_1^x f(x) dy = \int_1^t (x-1)f(x) dx,$$

因此  $F'(2) = (t-1)f(t)|_{t=2} = f(2)$ . 故选(A).

$$\text{二、} \frac{\partial z}{\partial y} = x^3(xf'_1 + \frac{1}{x}f'_2).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^4 \left( xf''_{11} + \frac{1}{x}f''_{12} \right) + x^2 \left( xf''_{21} + \frac{1}{x}f''_{22} \right) = x^5 f''_{11} + 2x^3 f''_{12} + x f''_{22}.$$

三、(1) 曲线在其上任意点处的切向量为  $\left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (-2\sin t, 2\cos t,$

$\frac{4}{\pi}$ ), 因此曲线在  $M$  点指向朝下的切向量为

$$\tau = - \left( -2\sin t, 2\cos t, \frac{4}{\pi} \right) \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left( \sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{4}{\pi} \right),$$

其单位向量为  $e_\tau = \frac{\pi}{2\sqrt{\pi^2+4}}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{4}{\pi})$ .

(2) 螺旋线上点  $M$  处的切线方程为

$$\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{y-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{z-1}{-\frac{4}{\pi}}.$$

(3)  $\nabla u|_M = (1, 2, 3)$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} \Big|_M = \nabla u \cdot e_\tau = -\frac{\pi}{2\sqrt{\pi^2+4}} \left( \sqrt{2} + \frac{12}{\pi} \right).$$

四、任意一点  $(x, y, z)$  到  $P$  的距离平方为  $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2$ , 因此  $\Sigma$  上离开点  $P$  最近的一点, 相当于  $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2$  在条件  $F(x, y, z) = 0$  下的条件极小值, 为此令

$$L = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 + \lambda F(x, y, z),$$

该函数的驻点满足



$$\begin{cases} 2(x-x_1) + \lambda F_x = 0, \\ 2(y-y_1) + \lambda F_y = 0, \\ 2(z-z_1) + \lambda F_z = 0, \\ F(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

由条件知  $Q(x_2, y_2, z_2)$  必是该方程组的解, 代入  $x=x_2, y=y_2, z=z_2$  后消去  $\lambda$ , 得

$$\frac{x_2 - x_1}{F_x(x_2, y_2, z_2)} = \frac{y_2 - y_1}{F_y(x_2, y_2, z_2)} = \frac{z_2 - z_1}{F_z(x_2, y_2, z_2)},$$

即

$$\overrightarrow{PQ} // \mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z)|_Q$$

因此, 直线  $PQ$  是曲面的法线.

五、由于函数  $x^2 y^3$  是  $y$  的奇函数, 积分区域关于  $x$  轴对称, 因此

$$\iint_D x^2 y^3 d\sigma = 0,$$

故

$$\iint_D (x^2 y^3 + e^{x^2}) dx dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^x e^{x^2} dy = 2 \int_0^1 x e^{x^2} dx = e - 1.$$

$$\begin{aligned} \text{六、} I &= \int_0^1 dz \iint_{z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4z^2} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_z^{2z} \rho^3 d\rho = \frac{15}{2} \pi \int_0^1 z^4 dz = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

七、解法一 过点  $M$  且平行已知平面的平面方程为

$$3(x+1) - 4y + z - 4 = 0;$$

取已知直线上一点  $N(-1, 3, 0)$ , 则

$$\overrightarrow{MN} = (0, 3, -4), \mathbf{n}_2 = \overrightarrow{MN} \times \mathbf{s} = (10, -4, -3),$$

因此, 过  $M$  与已知直线的平面方程为

$$10(x+1) - 4y - 3(z-4) = 0.$$

故, 所求直线的方程为

$$\begin{cases} 3x - 4y + z - 1 = 0, \\ 10x - 4y - 3z + 22 = 0. \end{cases}$$

解法二 取已知直线上一点  $N(t-1, t+3, 2t)$ , 则

$$\overrightarrow{MN} = (t, t+3, 2t-4),$$

令  $\overrightarrow{MN} \perp \mathbf{n} = (3, -4, 1)$ , 得  $t = 16$ , 故

$$\mathbf{s} = \overrightarrow{MN} = (16, 19, 28),$$

所求直线为

$$\frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}.$$

# (三) 高等数学(下)期末考试试卷(I)

## 试 题

### 一、填空、选择题

1. 函数  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$  在点  $(0,0)$  处\_\_\_\_\_.

- (A) 有二重极限但不连续. (B) 不连续但可偏导.  
(C) 连续但不可偏导. (D) 连续且可偏导.

2. 三元函数  $u = \sin(xy) + \cos(yz)$  在点  $(1, \frac{\pi}{4}, 1)$  处的全微分  $du =$  \_\_\_\_\_.

3. 曲线  $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2, \\ x + 2y + z = 6 \end{cases}$  在点  $(1, 1, 3)$  处的一个单位切向量为\_\_\_\_\_.

4. 设平面区域  $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 (a > 0, b > 0)$ , 则  $\iint_D (x+y)^5 d\sigma =$  \_\_\_\_\_.

5. 设曲线  $L$  是三角形  $ABC$  区域的正向边界, 其中  $A, B, C$  的坐标分别为  $(-1, 0), (1, 0), (0, 1)$ , 则  $\oint_L 2y \cos^2 x dx + (\sin x \cos x - x) dy =$  \_\_\_\_\_.

6. 设  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} (n = 1, 2, \dots)$ , 则以下级数中收敛的是\_\_\_\_\_.

(A)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n.$

(B)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$

(C)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}.$

(D)  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} + a_n).$

二、1. 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $f(x+y, xz) = 0$  确定, 且  $x=1, y=0$  对应于  $z=1$ , 其中  $f(u, v)$  具有连续的偏导数, 且  $f_u(1, 1) = f_v(1, 1) \neq 0$ , 求  $\text{grad} z(1, 0)$ .

2. 设一个直椭圆锥体的锥面方程为  $(z-1)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} (0 \leq z \leq 1, a > 0,$

$b > 0$ ), 若将该直圆锥体切削成长方体(长方体的长、宽、高平行于坐标轴, 如图 1 所示), 试用拉格朗日乘数法求所能获得的长方体的最大体积.

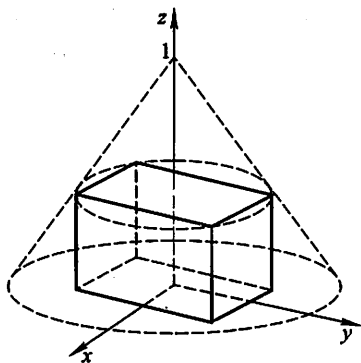


图 1

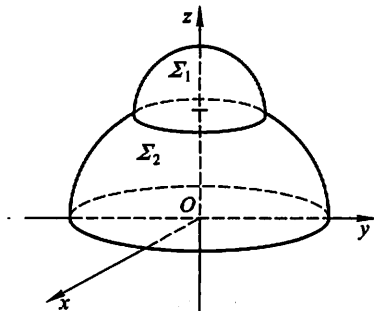


图 2

三、1. 图 2 所示的是某一建筑物的屋顶, 它由曲面  $\Sigma_1$  与  $\Sigma_2$  拼接而成.  $\Sigma_1$  是半径为 1 的半球面,  $\Sigma_2$  是半径为 2 的半球面的一部分, 试问该屋顶的面积是多少?

2. 设立体  $\Omega$  由旋转抛物面  $\Sigma: z = x^2 + y^2$  与  $\Sigma$  在点  $(a, b, a^2 + b^2)$  ( $a > 0, b > 0$ ) 处的切平面以及圆柱面  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  ( $r > 0$ ) 所围成, 证明  $\Omega$  的体积  $V$  仅与圆柱面的半径  $r$  相关, 而与点  $(a, b)$  的位置无关.

四、1. 求线密度为常数  $\mu$  的摆线  $L: \begin{cases} x = a(t + \sin t), \\ y = a(1 + \cos t) \end{cases} (t \in [0, 2\pi], a > 0)$  关于  $x$  轴的转动惯量(单位从略).

2. 设定向曲面  $\Sigma$  为锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $0 \leq z \leq 2$ ) 的下侧, 求积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x-y)dydz + (y-z)dzdx + (z-x)dx dy.$$

五、1. 判别以下命题的真假:(在真命题后的括弧内填入“√”, 否则填入“×”)

(1) 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 那么部分和  $S_n$  有界. [      ]

(2) 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛. [      ]

(3) 设  $f(x) = 1 - \cos x$ , 那么  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f\left(\frac{1}{n}\right)$  绝对收敛. [      ]

(4) 设  $a_n > 0$ , 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 那么  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho < 1$ . [      ]

(5) 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛区间是  $(-R, R)$ , 那么  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n+l}$  ( $l$  是某自然数) 的

收敛区间是  $(-\sqrt[3]{R}, \sqrt[3]{R})$ . [ ]

(6) 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径是  $R$ , 那么  $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$  的收敛半径也是  $R$ . [ ]

2. 把  $[0, \pi]$  上的函数  $f(x) = \begin{cases} k_1, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ k_2, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$  (常数  $k_1, k_2$  非零且  $k_1 \neq k_2$ )

展开成余弦级数, 并指出展开式成立的范围.

六、在平面  $x + y + z = 1$  上求一直线, 使它与直线  $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$  垂直相交.

## 参 考 答 案

一、1. 因为  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx^2}} f(x,y) = \frac{k}{1+k^2}$ , 即  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  不存在,  $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ , 故选(B).

$$\begin{aligned} 2. du &= \cos(xy)(xdy + ydx) - \sin(yz)(ydz + zdy) \Big|_{(1, \frac{\pi}{4}, 1)} \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{8} dx - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} dz. \end{aligned}$$

3. 对  $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2, \\ x + 2y + z = 6 \end{cases}$  两端求微分, 并代入点的坐标, 得

$$\begin{cases} dz = 2dx + 4dy, \\ dx + 2dy + dz = 0, \end{cases}$$

解得  $dz = 0, dx = -2dy$ , 由此得到一个切向量为

$$(-2, 1, 0),$$

因此所求单位切向量为  $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)$ .

4. 由于被积函数展开后的每一项或者是  $x$  的奇函数或者是  $y$  的奇函数, 而积分区域关于  $x$  轴和  $y$  轴都对称, 因此  $\iint_D (x+y)^5 d\sigma = 0$ .

$$5. \text{ 由格林公式, 得 } \oint_L 2y \cos^2 x dx + (\sin x \cos x - x) dy = \iint_D -2 d\sigma = -2.$$

6. 因为交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$  均收敛, 而两个收敛级数的和仍收敛, 因此

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} + a_n)$  收敛, 故选(D).

二、1.  $df(x+y, xz)|_{(1,0,1)} = f_u(1,1)(dx+dy) + f_v(1,1)(dz+dx)$ ,  
方程  $f(x+y, xz) = 0$  两端微分, 并把点的坐标代入, 得

$$dz = -2dx - dy,$$

即  $z_x(1,0) = -2, z_y(1,0) = -1$ , 因此  $\text{grad}z(1,0) = (-2, -1)$ .

2. 设长方体在第 1 卦限内的顶点为  $(x, y, z)$ , 则体积为

$$V = 4xyz.$$

令

$$L = xyz + \lambda \left[ (z-1)^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right],$$

求偏导, 得

$$L_x = yz - \frac{2\lambda x}{a^2} = 0,$$

$$L_y = xz - \frac{2\lambda y}{b^2} = 0,$$

$$L_z = xy + 2\lambda(z-1) = 0,$$

由此得到  $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = -z(z-1)$ , 结合条件  $(z-1)^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$  解得驻点  $(\frac{\sqrt{2}}{3}a,$

$\frac{\sqrt{2}}{3}b, \frac{1}{3})$ . 所能获得的长方体的最大体积为  $4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}b \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{27}ab$ .

三、1.  $\Sigma_2$  所在半球面含在  $\Sigma_1$  所在球面中部分面积为

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dx dy &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho = 4\pi(2-\sqrt{3}). \end{aligned}$$

因此, 屋顶的面积  $= \frac{1}{2}(4\pi \cdot 2^2) - 4\pi(2-\sqrt{3}) + \frac{1}{2} \cdot 4\pi = 2\pi(1+2\sqrt{3})$ .

2.  $\Sigma$  在点  $(a, b, a^2+b^2)$  ( $a>0, b>0$ ) 处的法向量为  $\mathbf{n} = (2a, 2b, -1)$ , 故切平面方程为

$$2ax + 2by - z - a^2 - b^2 = 0, \text{ 即 } z = 2ax + 2by - a^2 - b^2.$$

$\Omega$  的体积

$$\begin{aligned} V &= \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2} (x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2) dx dy \\ &= \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2} [(x-a)^2 + (y-b)^2] dx dy \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \rho^2 \cdot \rho d\rho$$

$$= \frac{\pi r^4}{2},$$

可见  $V$  与  $r$  有关,而与点  $(a, b)$  的位置无关.

$$\begin{aligned} \text{四、1. } I_x &= \int_L y^2 ds = \int_0^{2\pi} a^2 (1 + \cos t)^2 \sqrt{a^2 (1 + \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 8a^3 \cos^4 \frac{t}{2} \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt \stackrel{t=2u}{=} \int_0^\pi 16a^3 \cos^4 u |\cos u| du \\ &= 32a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 u du = \frac{256}{15} a^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2. } I &= \iint_{\Sigma} [-z_x(x-y) - z_y(y-z) + (z-x)] dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \left[ -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(x-y) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(y-\sqrt{x^2+y^2}) + \right. \\ &\quad \left. (\sqrt{x^2+y^2}-x) \right] dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \left[ -\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2} \right] dx dy = 0. \end{aligned}$$

五、1. (1) 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 即数列  $s_n$  收敛, 由此  $S_n$  有界, 故选  $\checkmark$ .

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  是级数收敛的必要条件而非充分条件, 例如发散级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 故选  $\times$ .

(3) 因为  $\left| (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 1 - \cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2} (n \rightarrow \infty)$ , 故选  $\checkmark$ .

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho < 1$  是正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的充分条件而非必要条件, 例如收敛级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ , 故选  $\times$ .

(5) 令  $y = x^3$ , 则  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n+l} = x^l \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ . 对于级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ , 由条件得,  $|y| < R$  时绝对收敛,  $|y| > R$  时发散, 即得级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n+l}$ , 在  $|x| < \sqrt[3]{R}$  时绝对收敛,  $|x| > \sqrt[3]{R}$  时发散, 故选  $\checkmark$ .

(6)  $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \left( \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \right)''$ , 由幂级数逐项求导后收敛半径不变,

故选 √.

2.  $f(x)$  偶延拓和周期延拓后, 只在  $x = \frac{2k+1}{2}\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ )

处间断, 而  $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1 dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi k_2 dx = k_1 + k_2$ ,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1 \cos nx dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi k_2 \cos nx dx \\ &= \frac{2(k_1 - k_2)}{n\pi} \sin \frac{n}{2}\pi, \end{aligned}$$

因此

$$f(x) = \frac{k_1 + k_2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}(k_1 - k_2)}{(2n-1)\pi} \cos (2n-1)x \quad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right).$$

六、已知直线的参数方程为

$$x = 1 + t, y = t, z = -2 - t,$$

代入平面求得  $t = 2$ , 已知直线与平面的交点为  $(3, 2, -4)$ . 所求直线的方向向量为

$$(1, 1, 1) \times (1, 1, -1) = -2(1, -1, 0),$$

因此所求直线为

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{0}.$$

## (四) 高等数学(下)期末考试试卷(II)

### 试 题

#### 一、简答题(要求:简洁、明确)

1. 写出  $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$  的定义域, 并求  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .
2. 设  $z = z(x, y)$  由方程  $x + y - z = e^z$  所确定, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .
3. 函数  $z = x^2 + y^2 - xy$  在点  $(-1, 1)$  处沿什么方向的方向导数最大? 最大方向导数的值为多少?
4. 求  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dy \int_y^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x} dx$ .
5. 求  $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + xz) dS$ , 其中  $\Sigma$  为圆柱面  $x^2 + y^2 = 2$  被平面  $z = 0$  和  $z = 4$  所割下的部分.

二、记曲面  $z = x^2 + y^2$  在点  $(-1, 0, 1)$  处的切平面为  $\Pi$ , 立体  $\Omega$  由曲面  $z = -(1 + x^2 + y^2)$  及平面  $\Pi$  所围成, 求  $\Omega$  的体积.

三、计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} (x^3 + y^2) dy dz + (y^3 + z^2) dz dx + (z^3 + x^2) dx dy$ , 其中  $\Sigma$  为上半球面  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  的上侧.

四、设质点在平面力场  $F = xy^2 \mathbf{i} + x^2 y \mathbf{j}$  的作用下从原点  $O$  沿光滑曲线  $L$  移动到椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  上位于第一象限内的点  $M(x_0, y_0)$  处.

- (1) 试将  $F$  所作的功  $W$  表达为曲线积分, 并证明  $W$  与路径无关;
- (2) 当  $x_0, y_0$  分别取何值时,  $F$  所作的功最大? 求出此最大值(单位从略).

五、把函数  $f(x) = \frac{\pi - x}{2} (0 \leq x \leq \pi)$  展开成余弦级数.

六、设  $a_0 = \frac{\pi}{4}, a_n = \iint_D \frac{n \arctan \frac{y}{x}}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ ,



其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$ .

(1) 求出  $a_n$ ;

(2) 求出幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛域及和函数.

七、1. 求椭球面  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  上的点  $M$ , 使该点处的切平面  $\Pi$  过已知直线  $L: \frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-2}$ .

2. 设数列  $u_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} mu_n = 1$ .

(1) 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (u_n + u_{n+1})$  收敛并求出其和.

(2) 判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (u_n + u_{n+1})$  是条件收敛还是绝对收敛(须说明理由).

## 参 考 答 案

一、1.  $f(x, y)$  的定义域为  $\{(x, y) | xy \geq -1, xy \neq 0\}$ ,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{1+xy}+1}{1} = 2.$$

2. 方程两端分别对  $x, y$  求偏导, 得

$$1 - z_x = e^z z_x, 1 - z_y = e^z z_y,$$

即

$$z_x = z_y = \frac{1}{1+e^z},$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{1+e^z} \right) = -\frac{1}{(1+e^z)^2} \cdot e^z z_x = -\frac{e^z}{(1+e^z)^3}.$$

3.  $\text{grad} z|_{(-1,1)} = (2x-y, 2y-x)|_{(-1,1)} = (-3, 3)$ . 因此, 函数沿  $(-1, 1)$  方向的方向导数最大, 最大方向导数等于  $3\sqrt{2}$ .

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^x \frac{\cos x}{x} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{1}{2}.$$

5. 由于  $\Sigma$  关于平面  $x=0$  对称, 有  $\iint_{\Sigma} xz dS = 0$ , 故

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + xz) dS &= \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS = \iint_{\Sigma} 2dS = 2S \\ &= 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2}\pi = 16\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

二、法向量

$$n = (z_x, z_y, -1)|_{(-1,0)} = (2x, 2y, -1)|_{(-1,0)} = (-2, 0, -1),$$

切平面  $\Pi$  的方程为

$$2x + z + 1 = 0.$$

$\Omega$  的体积

$$\begin{aligned} V &= \iint_{x^2+y^2 \leq 2x} [-(1+x^2+y^2)+2x+1] dx dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} (2\rho\cos\theta - \rho^2) \rho d\rho \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

三、 $\Sigma_1: z=0(x^2+y^2 \leq 1)$  下侧, 则

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma} (x^3+y^2) dy dz + (y^3+z^2) dz dx + (z^3+x^2) dx dy \\ &= \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} (x^3+y^2) dy dz + (y^3+z^2) dz dx + (z^3+x^2) dx dy \\ &\quad - \iint_{\Sigma_1} (x^3+y^2) dy dz + (y^3+z^2) dz dx + (z^3+x^2) dx dy \\ &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0} (3x^2+3y^2+3z^2) dV - \iint_{\Sigma_1} x^2 dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 3r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \cos^2\theta \cdot \rho d\rho \\ &= \frac{6\pi}{5} + \frac{\pi}{4} = \frac{29}{20}\pi. \end{aligned}$$

四、 $W = \int_L xy^2 dx + x^2 y dy$ , 由于  $Q_x = 2xy = P_y$ , 因此  $W$  与路径无关.

$$W = \int_{(0,0)}^{(x_0,y_0)} xy^2 dx + x^2 y dy = \left[ \frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{(0,0)}^{(x_0,y_0)} = \frac{1}{2} x_0^2 y_0^2,$$

当  $\frac{x_0^2}{9} = \frac{y_0^2}{4} = \frac{1}{2}$ , 即  $x_0 = \frac{3}{2}\sqrt{2}, y_0 = \sqrt{2}$  时  $F$  所作的功最大, 其最大值等于  $\frac{9}{2}$ .

$$\text{五、} a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{(\pi-x) \sin nx}{n} - \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi},$$

其余弦级数为

$$f(x) = \frac{\pi-x}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2 \pi} \cos (2n-1)x \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

$$\text{六、} a_n = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{n \arctan^{n-1} y}{(1+x^2)(1+y^2)} dy = \int_0^1 \frac{\arctan^n x}{1+x^2} dx = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\pi}{4}, R = \frac{4}{\pi}.$$

$$\text{当 } x = \frac{4}{\pi} \text{ 时, } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{4(n+1)} \text{ 发散;}$$

$$\text{当 } x = -\frac{4}{\pi} \text{ 时, } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi(-1)^n}{4(n+1)} \text{ 收敛,}$$

因此收敛域为  $\left[-\frac{4}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right)$ , 记和函数为  $s(x)$ , 则

$$[xs(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} x^n = \frac{\frac{\pi}{4}}{1 - \frac{\pi x}{4}} = \frac{\pi}{4 - \pi x},$$

故

$$xs(x) = \int_0^x \frac{\pi}{4 - \pi x} dx = -\ln(4 - \pi x) + \ln 4,$$

因此其和函数为

$$s(x) = \begin{cases} \frac{-\ln(4 - \pi x) + \ln 4}{x}, & x \in \left[-\frac{4}{\pi}, 0\right) \cup \left(0, \frac{4}{\pi}\right), \\ \frac{\pi}{4}, & x = 0. \end{cases}$$

七、1. 设  $M(x_0, y_0, z_0)$  为所求的点, 则椭球面在该点处的法向量为  $(2x_0, 4y_0, 6z_0)$ , 切平面  $\Pi$  的方程为

$$x_0 x + 2y_0 y + 3z_0 z = 21.$$

由条件, 得  $(2x_0, 4y_0, 6z_0) \perp (2, 1, -2)$  即

$$(2x_0, 4y_0, 6z_0) \cdot (2, 1, -2) = 4x_0 + 4y_0 - 12z_0 = 0.$$

而直线  $L$  上的点  $(6, 3, 1)$  必在切平面  $\Pi$  上, 因此

$$6x_0 + 6y_0 + 3z_0 = 21,$$

而  $M(x_0, y_0, z_0)$  在椭球面  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  上, 即

$$x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21.$$

解得  $x_0 = 0, y_0 = 3, z_0 = 1$  和  $x_0 = 4, y_0 = -1, z_0 = 1$ , 即  $M$  点为

$$(0, 3, 1) \text{ 或 } (4, -1, 1).$$

2. (1) 记级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (u_n + u_{n+1})$  的前  $n$  项之和为  $S_n$ , 则

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (u_k + u_{k+1}) = u_1 + (-1)^{n+1} u_{n+1}.$$

由条件  $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 1$ , 得  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = u_1$ , 即级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (u_n + u_{n+1})$  收敛, 其和为  $u_1$ .

(2) 由条件  $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 1$ , 得  $n$  足够大后  $u_n \geq 0$ , 且  $u_n \sim \frac{1}{n} (n \rightarrow \infty)$ . 因此当  $n$  足够大后,

$$|(-1)^{n+1} (u_n + u_{n+1})| = u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n} (n \rightarrow \infty),$$

即  $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1} (u_n + u_{n+1})|$  发散.

因此级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (u_n + u_{n+1})$  条件收敛.



College Mathematics Guidance Series  
大学数学学习辅导丛书

- |  |           |
|--|-----------|
| <input type="checkbox"/> 高等数学 第六版 上册                     | 同济大学数学系   |
| <input type="checkbox"/> 高等数学 第六版 下册                     | 同济大学数学系   |
| <input type="checkbox"/> 高等数学附册 学习辅导与习题选解 同济·第六版         | 同济大学数学系   |
| <input type="checkbox"/> 高等数学习题全解指南 上册 同济·第六版            | 同济大学数学系   |
| <input checked="" type="checkbox"/> 高等数学习题全解指南 下册 同济·第六版 | 同济大学数学系   |
| <input type="checkbox"/> 工程数学——线性代数 第五版                  | 同济大学数学系   |
| <input type="checkbox"/> 线性代数附册 学习辅导与习题全解 同济·第五版         | 同济大学数学系   |
| <input type="checkbox"/> 工程数学——新编统计学                     | 同济大学数学系   |
| <input type="checkbox"/> 工程数学——概率统计简明教程                  | 同济大学应用数学系 |
| <input type="checkbox"/> 概率统计简明教程附册 学习辅导与习题全解            | 同济大学应用数学系 |

ISBN 978-7-04-020746-0



9 787040 207460 >

定价 21.40元