《高等数学》习题参考资料

第五篇　概率论与数理统计

第十一章　　概　率　论

§ 1　概率

习　题

1．设一个工人生产了 5 个零件，用 A_i 表示“第 i 个零件是正品”，$i=1,2,3,4,5$，试用 A_i 表示下列事件：

（1）没有一个次品；　　（2）最多有 3 个次品；

（3）只有 2 个次品；　　（4）至少有 3 个次品．

【答案】　(1)　$B_1=A_1A_2A_3A_4A_5$；

(2)　$B_2=A_1A_2+A_1A_3+A_1A_4+A_1A_5+A_2A_3+A_2A_4+A_2A_5+A_3A_4+A_3A_5+A_4A_5$；

(3)　$B_3=A_1A_2A_3\overline{A_4A_5}+A_1A_2\overline{A}_3A_4\overline{A}_5+A_1\overline{A}_2A_3A_4\overline{A}_5+\overline{A}_1A_2A_3A_4\overline{A}_5+A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5+A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4A_5+\overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4A_5+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4A_5+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4A_5+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4A_5$；

(4)　$B_4=+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4\overline{A}_5+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4\overline{A}_5+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5+A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5+A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4\overline{A}_5+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4\overline{A}_5+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4\overline{A}_5+\overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4\overline{A}_5+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4A_5+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4A_5+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4\overline{A}_5$．

2．　已知 $P(B)=0.3$，　$p(A\cup B)=0.6$，求 $P(A\overline{B})$．

【答案】　$P(A\overline{B})=P(A\cup B)-P(B)=0.3$．

3．如果事件 A 和 B 同时出现的概率 $P(AB)=0$，则下列结论成立的是：

(1)　A 与 B 互逆；　(2)　AB 为不可能事件；(3)　$P(A)=0$ 或 $P(B)=0$；(4)　AB 未必是不可能事件．

【解】(1) 和(2)成立．　(3),(4) 不成立．

4．已知 $P(A\cap B)=P(\overline{A}\cap\overline{B})$，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$．

【答案】 $P(B)=1-p$．

5．设事件 A,B 的概率分别为 $P(A)=\frac{1}{2}$ 和 $P(B)=\frac{1}{4}$，且 $P(AB)=\frac{1}{10}$，求 $P(\overline{A}B)$ 和 $P(A\overline{B})$

【解】 $P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{3}{20}$；$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{2}{5}$．

6．对任意三个事件 A,B,C，试证

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\text{．}$$

并把这个结论推广到 n 个事件的情况

【解】 $P(A\cup B\cup C)=P(A\cup B)+P(C)-P\big((A\cup B)\cap C\big)$

$$=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC\cup BC)$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\text{．}$$

7．十把钥匙，其中有 3 把能打开房门，现从中任取 2 把，求能打开房门的概率．

【答案】 $p=\frac{C_3^1C_7^1+C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}$．

8．甲、乙、丙各自向同一个目标射击一次，已知它们的命中率分别为 0.7，0.8 和 0.75，求目标被击中 2 次的概率．

【解】 设 A,B,C 分别表示甲乙丙射中目标的事件，

$$p=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)$$

$$=0.7\times0.8\times0.25+0.7\times0.2\times0.75+0.3\times0.8\times0.75=0.14+0.105+0.18$$

$=0.425$．

9．男人的性染色体为 (x,y)，女人为 (x,x)．当生殖细胞作成数分裂时．这时染色体分配在两个细胞中．如果某种遗传病和隐性遗传病都在染色体 x 上，把这种染

色体记为 x^*．对于男人，性染色体为(x^*, y)时为隐性遗传病患者．对于女人，性染色体为(x^*, x^*)时，为隐性遗传病患者，性染色体为(x^*, x)或(x, x^*)时为隐性遗传病携带者．讨论子女为隐性遗传病患者(A_1)和隐性遗传病携带者(A_2)的概率．

【解】　除去父母均为正常者之外，列表如下：

父	母	子	女儿	$P(A_1)$	$P(A_2)$	$P(A_1+A_2)$
(x,y)	(x^*,x)	$(x,y),(x^*,y)$	$(x,x),(x,x^*)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
(x,y)	(x^*,x^*)	$(x^*,y),(x^*,y)$	$(x,x^*),(x,x^*)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
(x^*,y)	(x,x)	$(x,y),(x,y)$	$(x^*,x),(x^*,x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
(x^*,y)	(x^*,x)	$(x^*,y),(x,y)$	$(x^*,x^*),(x^*,x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
(x^*,y)	(x^*,x^*)	$(x^*,y),(x^*,y)$	$(x^*,x^*),(x^*,x^*)$	1	0	1

10．若班上有 40 个同学，每个人的生日是一年 365 天中的哪一天是等可能的．试求班上至少有两位同学的生日在同一天的事件 A 的概率．

【解】 此问题也类似一个分房问题．把 365 天看作 365 个房间，事件 A 的对立事件是“没有两个同学在同一天生日”的事件，它就相当于每个同学占据一天的日子一样．于是按例 10 知

$$P(\overline{A})=\frac{N!}{(N-n)!\cdot N^n}$$

$N=365, n=40$，因而

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{N!}{(N-n)!\cdot N^n}=1-\frac{365!}{(365-40)!\cdot 365^{40}}=1-0.109=0.891,$$

即班上至少有两个同学在同一天生日的可能性达到 89%．

若 n =20，则概率就接近 0.5．

若 n = 50，则概率达到 97%．

若 n = 100，则概率几乎达到 1．

11．从 $0,1,2,\cdots,9$ 十个数字中任取 3 个组成三位数，问这个三位数是偶数的概率．

【答案】 $p=\dfrac{C_9^2P_2+C_4^1C_8^1C_8^1}{C_9^1P}=\dfrac{41}{81}$

12．某人写了 3 封信，并分别在 3 个信封上写了这 3 封信的地址，如果他任意地将 3 张信纸装入 3 个信封中，求没有一封信的信封和信纸是配对的概率..

【解】 设 A 表示”至少有一封信的信封和信纸是配对”的事件． A_i 表示”第 i 个信封和自己的信纸配对”的事件． $P(A_i)=\frac{1}{3}$， $P(A_iA_j)=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$， $i\neq j$，

$P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$． $A=A_1+A_2+A_3$，于是

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\ -P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

$$=3\times\frac{1}{3}-3\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6},$$ 因此 $P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{1}{3}$．

13．设 100 个成品中有 3 个是次品，任取 5 个，求其次品数分别为 0 ，1 ，2 ，3 的概率．

【答案】 $p_i=\frac{C_3^iC_{97}^{5-i}}{C_{100}^5}$， $i=0,1,2,3$．

14．设一个口袋里有十个硬币，其中五分的有 2 个，二分的有 3 个，一分的有 5 个，若从中任取 5 个硬币，问其总值大于 10 分的概率．

【答案】 $$p=\frac{C_2^2C_8^3+C_2^1C_3^3C_5^1+C_2^1C_3^2C_5^2}{C_{10}^5}=\frac{126}{252}=0.5$$

15．设 100 件产品中有 5 件次品，现从中随意地抽取 10 件，求这 10 件中恰有 3 件次品的概率．

【答案】 $p=\frac{C_5^3C_{95}^7}{C_{100}^{10}}$．

16．电路由元件 A 和两个并联的元件 B 和 C 串联而成．设元件 A ，B ，C 损坏的概率分别是 0.3 ，0.2 ，0.25 ．求电路发生故障的概率．

【解】

$E=A\cup(B\cap C)$，$P(E)=P(A)+P(BC)-P(ABC)=0.3+0.05-0.015=0.335$

17．设 100 件零件中，次品率为 10%，先后从中各任取 1 个，第一次取出的零件不放回，求第二次取得正品的概率．

【答案】 $p=\frac{9}{10}\times\frac{89}{99}+\frac{1}{10}\times\frac{90}{99}=0.9$

18．设口袋中有 a 个黑球，b 个白球 $(b>2)$，球的大小和质地一样，甲，乙，丙三人依次从口袋中任取一个球，取后不放回，分别求出三人各自取得白球的概率．

【答案】 $\frac{b}{a+b}$.

19．设 12 个乒乓球中有 9 个是新的，3 个是旧的，第一次比赛取出了 3 个，用完后放回，第二次比赛又取出 3 个球，求第二次比赛取出的 3 个球中有 2 个是新球的概率．

【答案】 $p=\frac{C_3^0C_9^3}{C_{12}^3}\frac{C_6^1C_6^2}{C_{12}^3}+\frac{C_3^1C_9^2}{C_{12}^3}\frac{C_5^1C_7^2}{C_{12}^3}+\frac{C_3^2C_9^1}{C_{12}^3}\frac{C_4^1C_8^2}{C_{12}^3}+\frac{C_3^3C_9^0}{C_{12}^3}\frac{C_3^1C_9^2}{C_{12}^3}=\frac{1377}{3025}$.

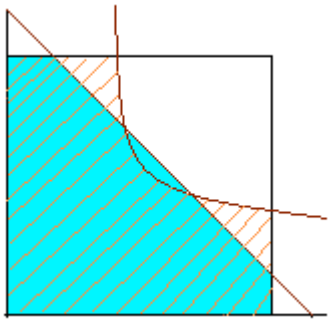
20．设 10 个考签中有 4 个是难题，三个人参加抽签考试，不重复地抽取，每个人抽一题，甲先，乙次，丙最后，证明三个人抽到难题的概率是相同的．

【解】 本题类似 18 题，每个人抽到难题的概率都是 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

21．两封信随机地投入到 4 个邮筒里．求前两个邮筒内没有信的概率以及第一个邮筒内只有一封信的概率．

【答案】 $p_1=\frac{2^2}{4^2}=\frac{1}{4}$，$p_2=\frac{C_2^1\cdot 3}{4^2}=\frac{3}{8}$.

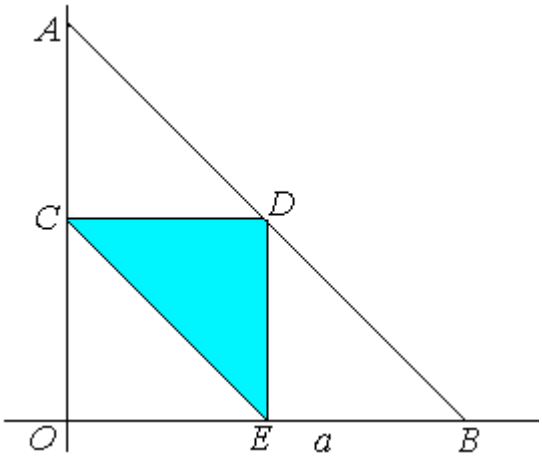
22．二维随机点 (m,n) 在区域 $|m|<1,|n|<1$ 中等可能地出现，求方程 $x^2+mx+n=0$ 的两个根都是正根的概率



【答案】 $n>0$且 $m<0$且$m^2-4n>0$，$p=\dfrac{1}{48}$.

23．把长度为a的铁丝任意折成三段，求它们可以构成一个三角形的概率.

【解】 设三段为$x,y,a-x-y$，于是$0<x<a$，$0<y<a$，；根据三角形两边和大于第三边，则符合条件的是$0<x<\dfrac{a}{2}$，$0<y<\dfrac{a}{2}$，$\dfrac{a}{2}<x+y<a$，如图.



因此所求概率 $p=\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}a^2}=\dfrac{1}{4}$.

24．从$(0,1)$中随机地取两个数，求下列事件的概率 (1) 两数之和小于$\dfrac{6}{5}$；(2) 两数之积小于$\dfrac{1}{4}$；(3) 同时满足前两个条件.

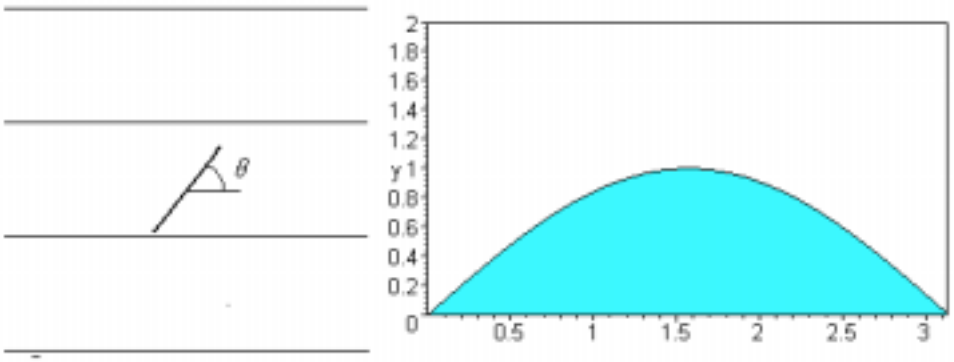
【解】 (1) $p=\dfrac{1-\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}}{1}=\dfrac{17}{25}=0.68$；

(2) $p=\dfrac{1}{4}\times 1+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\dfrac{1}{4x}dx=\dfrac{1}{4}(1+\ln 4)=0.567$；

(3) $p=\dfrac{1}{5}\times 1+\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{6-\sqrt{11}}{10}}\left(\dfrac{5}{6}-x\right)dx+\int_{\frac{6-\sqrt{11}}{10}}^{\frac{6+\sqrt{11}}{10}}\dfrac{1}{4x}dx+\int_{\frac{6+\sqrt{11}}{10}}^{1}\left(\dfrac{5}{6}-x\right)dx=0.593$.

25． *Buffon* 问题 在平面上画出等距离a的平行线，向此平面随机地投掷一根长为$l(l<a)$的针．试求针与平行线相交的概率.

【解】 以 M 表示针的中点，x 表示 M 与最近的平行线的距离，t 表示针与平行线的夹角，显然 $0 \le x \le \frac{a}{2}$，$0 \le t \le \pi$，针与平行线相交的充分必要条件是 $0 < x < \frac{l}{2}\sin t$，于是



$$P(A) = \frac{\frac{l}{2}\int_0^{\pi} \sin t dt}{\pi \times \frac{a}{2}} = \frac{2l}{\pi a}$$

26．设有 $A_i (i = 1,2,3,4,5)$ 五个相同元件构成图 11.1.2 所示系统，每一个元件能正常工作的概率是 p，各元件是否正常工作是相互独立的，问此系统能正常工作(接通)的概率?

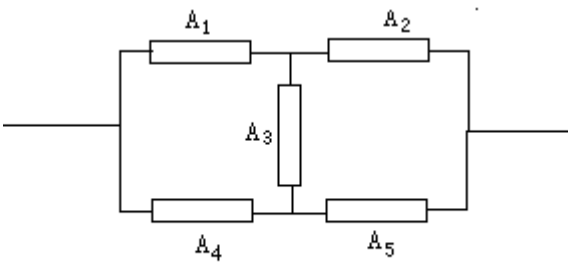
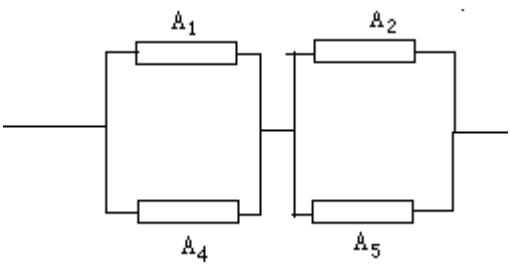


图11.1.2

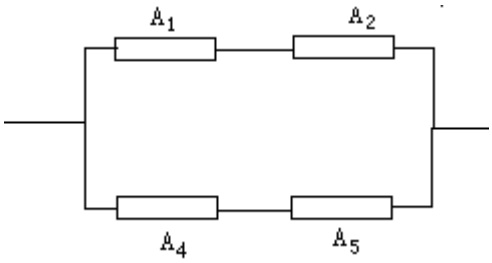
【解】 将系统分成两种情况讨论，一是 A_3 正常，二是 A_3 不正常，记 B 为系统正常工作，A_i 表示 A_i 元件正常工作，A_3 正常时相当于右图



于是

$$P(B \mid A_3) = P\big((A_1 \cup A_4) \cap (A_2 \cup A_5)\big)$$
$$= P(A_1 \cup A_4)P(A_2 \cup A_5)$$
$$= (1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_4))(1 - P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_5)) = p^2(2-p)^2,$$

A_3 不正常时，相当于右图



$$P(B|\overline{A}_3)=P\big((A_1\cap A_4)\cup(A_2\cap A_5)\big)=P(A_1A_2)+P(A_4A_5)-P(A_1A_2A_4A_5)$$
$$=p^2(2-p^2),$$
于是根据全概率公式，

$$P(B)=P(A_3)P(B|A_3)+P(\overline{A}_3)P(B|\overline{A}_3)$$
$$=p\cdot p^2(2-p)^2+(1-p)\cdot p^2(2-p^2)$$
$$=p^2(2p^3-5p^2+2p+2)$$

《高等数学》习题参考资料

第十一章　　概　率　论

§ 2　条件概率 全概率公式 Bayes 公式

习　题

1．袋中有 4 个白球，2 个黑球，连取 2 个球，取后不放回，如果已知第一个是白球，问第二个是白球的概率?

【答案】$\frac{3}{5}$.

2．A,B 为两随机事件，且 $B\subset A$，则下列哪个式子是正确的：(1) $P(A\cup B)=P(A)$；　(2) $P(AB)=P(A)$；(3) $P(B-A)=P(A)-P(B)$．(4) $P(B|A)=P(B)$．

【答案】(1) 是正确的. 其余是错误的

3．用三个机床加工同一种零件，零件由各机床加工的概率分别是 0.5 ，0.35 ，0.15 ，各机床加工的零件为合格品的概率分别是 0.95 ，0.92 ，0.96 ，求全部产品的合格率．

【解】 $p = 0.5\times 0.95 + 0.35\times 0.92 + 0.15\times 0.96 = 0.941.$

4．设有 10 箱同样规格的产品，其中 5 箱是甲厂的产品，次品率是 $\frac{1}{10}$；3 箱是乙厂的产品，次品率是 $\frac{1}{15}$；2 箱是丙厂的产品，次品率是 $\frac{1}{20}$．今在这 10 箱产品中任选 1 箱，再从中任取 1 件产品，问它是次品的概率是多少？又若已知取得的一件产品是次品，它是甲厂的产品的概率是多少？

【解】(1) $p = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(E \mid A_i) = \frac{5}{10}\cdot\frac{1}{10} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{15} + \frac{2}{10}\cdot\frac{1}{20} = \frac{2}{25}$ ； (2) $\frac{5}{8}.$

5．有 2 个口袋．甲袋中装有 2 个白球，1 个黑球；乙袋中装有 1 个白球，2 个黑球．由甲袋任取 1 个球放入乙袋，再从乙袋中任取 1 个球，求取到白球的概率．

【解】 $p = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$

6．设每次射击时命中率为 0.2 ，问至少需进行多少次独立的射击，才能使至少击中一次的概率不小于 0.9 ．

【解】射击 n 次, 至少击中一次的概率为 $p = 1-(1-0.2)^n$, $1-0.8^n = 0.9$, 于是 $n = \frac{\ln 0.1}{\ln 0.8} = 10.3$, 因此取 $n = 11$ 次.

7．某设备由 A , B 两个部件串联而成，两个部件中任何一个失灵，该设备就失灵．若使用 1000 小时后，部件 A 失灵的概率是 0.1，部件 B 失灵的概率是 0.3，若两个部件是否失灵是相互独立的，求这个设备使用 1000 小时后不失灵的概率．

【解】 $p = 1-(1-0.1)(1-0.3) = 0.37$.

8．某种牌号的电子元件使用到 1000 小时的概率为 0.9，使用到 1500 小时的概率为 0.3，今有该种牌号的一个电子元件已使用了 1000 小时，问该电子元件能用到 1500 小时的概率．

【解】条件概率 $p = \frac{1}{3}$

9．甲、乙两人独立地对同一目标进行射击一发子弹，他们的命中率分别是 0.7 和 0.8，现在目标被命中一发，求它是甲射中的概率．

【解】利用 *Bayes* 公式: $p = \frac{0.7\times 0.2}{0.7\times 0.2 + 0.8\times 0.3} = \frac{14}{38}$.

10．设三次独立试验中，事件 A 出现的概率相等．若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$，求事件 A 在一次试验中出现的概率．

【解】 $1-(1-p)^3 = \frac{19}{27}$， $p = \frac{1}{3}$;

11．上海电脑型体育彩票共有 36 个号码（自 01，02，03 到 36）可供选择，每注选 7 个号码，每期开奖开出七个号码．若彩票的七个号与开奖的七个号一样(不论次序)，则中特等奖．假定每期彩票销售 4,500,000 元，有 300 个销售点，平均每个销售点销售 15000 元．问每期彩票至少开出一个一等奖的概率是多少? 经多少期彩票销售才能使至少开出一个特等奖的概率达到 0.95．

【解】 解 上海电脑型福利彩票共有 36 个号可供选择, 每注 7 个号, 因此共有 $C_{36}^{7} = 8347680$ (记为 M) 种(注). 每次销售 6,000,000 元, 有 300 个销售点, 平均每个销售点销售 20000 元, 即 10000 张彩票. 在一个销售点售出的彩票中, 中一等奖的可能概率为

$x \sim B(10000, \frac{1}{M})$， $p_1 = \sum_{k=1}^{10000} C_{1000}^{k}\left(\frac{1}{M}\right)^k\left(\frac{M-1}{M}\right)^{10000-k} = 1-\left(\frac{M-1}{M}\right)^{10000}$

$= 0.001197220461$.

各销售点的销售可以看作的相互独立的. 300 个销售点至少有一个点销售的彩票中一等奖的概率是

$$p_{300} = 1-(1-p_1)^{300} = 1-(1-0.001197220461)^{300} \approx 0.3018919036.$$

即每期开奖至少产生一个一等奖的概率约 0.302. 因此, 在 k 期彩票中至少产生一个一等奖的概率 P_k 是

$$P_k = 1-(1-p_{300})^k = 1-(0.63893742)^k.$$

据此易计算出

$$\text{p3}:=0.5126450857,\quad \text{p4}:=0.7624851875,\quad \text{p5}:=0.8341889864$$
$$\text{p6}:=0.8842459889,\quad \text{p7}:=0.9191911877,\quad \text{p8}:=0.9435867139$$
$$\text{p9}:=0.9606174282,\quad \text{p10}:=0.9725067078,\quad \text{p11}:=0.9808067101$$

若要使中奖概率达到 0.95 则有 $k>8$, 即开奖

12. 在长达 11 年的时间里，从得克萨斯州的一个县中有 870 人被要求作为可能的大陪审团的陪审员，该县的人口中有墨西哥血统的美国人占 79%，但只有 339 个有墨西哥血统的美国人被选为履行大陪审团陪审员的职责．如何用来概率模型确定：大陪审团陪审员的选择对有墨西哥血统的美国人来说并非没有种族歧视．

【解】 若没有种族偏见则 339 个或更少的墨西哥血统的美国人被选为陪审员的概率为 $\sum_{n=0}^{339}\frac{C_{[0.79p]}^{n}C_{[0.21p]}^{870-n}}{C_p^{870}}$， 其中 p 是该县的人口数, p 是个很大的数，若 $p=10000$, 则此概率为 0.20848×10^{-161}, 几乎为 0.

13. 某场比赛进行五局, 并以五战三胜决定胜负. 若已知甲方在每一局中的胜率为 0.6, 求甲方在比赛中获胜的概率是多少?

【解】 获胜有三种情况: 3:0, 3:1, 3:2, 于是

$$p(A_1) = p^3 = 0.216,$$
$$P(A_2) = C_3^2 p^2(1-p)\cdot p = 0.259,$$
$$P(A_3) = C_4^2 p^2(1-p)^2\cdot p = 0.207,$$

因此 $p = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3) = 0.682$.

14. 假设有三张形状完全相同, 但所涂颜色不同的卡片, 第一张两面全是红色, 第二张两面全是黑色, 第三张是一面红一面黑, 将这三张卡片放在帽子里经充分混合后, 随机地取出一张放在桌上, 如果取出的卡片朝上的一面是红的, 那么它的另一面为黑的概率是多少.

【解】 $\frac{1}{3}$. 注意两面全是红色的卡片有正反面向上两种可能, 因此符合“卡片朝上的一面是红的”条件的情况有三种, 另一面为黑的仅一种情况.

15. 若选择题有 m 种答案, 考生可能知道答案, 也可能瞎猜. 设考生知道正确答案的概率是 p, 瞎猜的概率是 $1-p$, 考生瞎猜猜对的概率为 $\frac{1}{m}$, 如果已知考生答对了, 问他确实知道正确答案的概率是多少.

【解】 $\frac{mp}{1+(m-1)p}$.

16. 瓷杯成箱出售, 每箱 20 只, 假设各箱含 0, 1, 及 2 只残次品的概率分别为 0.8, 0.1, 0.1, 一顾客欲购一箱瓷杯, 购买时, 任取一箱, 从中任意地察看 4 只, 若无残次品, 则就买下, 否则退回. 试求: (1) 顾客买下该箱的概率; (2) 在顾客买下该箱的瓷杯中, 确实没有残次品的概率.

【解】 (1) $\frac{448}{475}$; (2) $\frac{95}{112}$.

17. 在 n 双不同的鞋中任取 $2r$ 只 $(r<n)$, 求 (1) 其中没有成双的概率; (2) 恰好有 2 双的概率; (3) 有 r 双的概率.

【解】 样本点总数有 C_{2n}^{2r}. (1) 可以先从 n 双中取出 $2r$ 双, 再从每双中任取一只, 于是 $p_1=\frac{2^{2r}C_n^r}{C_{2n}^{2r}}$; (2) 先从 n 双中任取 2 双, 再从 $n-2$ 双中取出 $2r-4$ 双, 再从每双中任取一只, 于是 $p_2=\frac{n2^{2r-2}C_{n-1}^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}$; (3) $p_3=\frac{C_n^r}{C_{2n}^{2r}}$.

《高等数学》习题参考资料

第十一章　　概　率　论

§3　一维随机变量

习　　题

1．设有 m 件产品，其中 n 件为次品，从中任取 k 件 $(k<m)$，记取得的次品数为 ξ，试写出 ξ 的概率分布．

【解】根据题意认为 $n \le m$，由于有较多的未知参数，因此应该讨论这些参数的不同情况．

$k \le m-n, k \le n$	$P(\xi=i)=\dfrac{C_n^i C_{m-n}^{k-i}}{C_m^k}$	$i=0,1,\cdots,k$
$k \le m-n, k > n$	$P(\xi=i)=\dfrac{C_n^i C_{m-n}^{k-i}}{C_m^k}$	$i=0,1,\cdots,n$
$k > m-n, k \le n$	$P(\xi=i)=\dfrac{C_n^i C_{m-n}^{k-i}}{C_m^k}$	$i=k-(m-n),\cdots,k$
$k > m-n, k > n$	$P(\xi=i)=\dfrac{C_n^i C_{m-n}^{k-i}}{C_m^k}$	$i=k-(m-n),\cdots,n$

2．设离散型随机变量 ξ 以正的概率只取 1，2 ，3 ，又设 $P(\xi=1)=0.4$，$P(\xi=3)=0.5$．（1）计算 $P(\xi=2)$；（2）求 ξ 的分布和分布函数．

【解】（1）$P(\xi=2)=0.1$，

（2）分布律：

$\xi=i$	1	2	3
p	0.4	0.1	0.5

分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 0.4, & 1<x\le 2\\ 0.5, & 2<x\le 3\\ 1, & 3<x\end{cases}$

3．设随机变量ξ的密度函数为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{2\pi}\sqrt{4-x^2}, & x\in[-2,2],\\ 0, & x\notin[-2,2],\end{cases}$$

求（1）系数 A 的值；（2）ξ的分布函数$F(x)$，并作图．

【解】（1）$A=1$；

$$(2)\quad F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ \dfrac{1}{4\pi}\left(2\pi+4\arcsin\dfrac{x}{2}+x\sqrt{4-x^2}\right), & -2<x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

4．从学校到市中心广场共有六个十字路口，假定在各个十字路口遇到红灯的事件是相互独立的，且概率都是 0.4．以ξ表示遇到的红灯数，求随机变量ξ的分布．以η表示汽车行驶过程中在第一次停止前所经过的路口数，求η的分布．

【解】

ξ	0	1	2	3	4	5	6
p	0.6^6	$C_6^1 0.6^5 0.4$	$C_6^2 0.6^4 0.4^2$	$C_6^3 0.6^3 0.4^3$	$C_6^4 0.6^4 0.4^4$	$C_6^5 0.6^1 0.4^5$	0.4^6

η	0	1	2	3	4	5	6^*
p	0.4	$0.4\cdot 0.6$	$0.4\cdot 0.6^2$	$0.4\cdot 0.6^3$	$0.4\cdot 0.6^4$	$0.4\cdot 0.6^5$	0.6^6

＊ 假定过了 6 站后停下．

5．设某种疫苗中所含细菌数服从 *Poisson* 分布．设 1 毫升疫苗中平均含有一个细菌，把这种疫苗放入 5 只试管中，每只试管放 2 毫升．试求：（1）5 只试管中都有细菌的概率；（2）至少有 3 只试管中有细菌的概率（提示：$\lambda=2$）．

【解】每只试管中有细菌的概率为 p，记ξ表示细菌个数，η表示有细菌的试管数，于是 $p=P(\xi\ge 1)=1-P(\xi=0)=1-\dfrac{2^0}{0!}e^{-2}\approx 0.8647$，

（1）5 只试管中都有细菌的概率为 $P(\eta=5)=p^5=0.8647^5\approx 0.4833$；

(2) 记$q=1-p$，至少有 3 只试管中有细菌的概率

$$P(\eta\geq 3)\ =C_5^3p^3q^2+C_5^4p^4q^1+C_5^5p^5q^0=0.4834+0.3782+0.1184=0.980\ .$$

6．某乘客在某公交车站候车的时间（以分计）ξ服从指数分布，其概率密度函数

$$\varphi_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases},$$

某乘客在候公交车时，若等车超过 10 分钟，他就离开而乘出租车．该乘客一个星期要乘车 5 次，若以 η 表示一周内他乘出租车的次数，写出η的分布律，

【解】 每天等车时间超过10分钟的概率

$$p=\int_{-\infty}^{10}\varphi_\xi(x)dx=\int_0^{10}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx=-e^{-\frac{x}{5}}\Big|_0^{10}=1-e^{-2}$$

于是η的分布律：

$\eta=k$	0	1	2	3	4	5
$P(\eta=k)$	q^5	$C_5^1pq^4$	$C_5^2p^2q^3$	$C_5^3p^3q^2$	$C_5^4p^4q$	p^5

7．设随机变量ξ服从$N(0,1)$，那么$\Phi_0(0),\varphi_0(0),P(\xi=0)$各取什么值，它们各表示什么意思?

【解】 $\Phi_0(0)=0$，$\varphi_0(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$，$P(\xi=0)$无意义.

8．设随机变量ξ服从$N(0,1)$，求$P(\xi<2.5)$，$P(\xi\geq -1)$，$P(-1.5\leq\xi\leq 1)$.

【解】 $P(\xi<2.5)=0.99379$，$P(\xi\geq -1)=2\times 0.841345\text{-}1=0.68269$，

$P(-1.5\leq\xi\leq 1)=0.5\text{-}(1\text{-}0.933193)=0.433193$.

9．设随机变量ξ服从$N(-1,16)$，求$P(\xi>-1.5)$，$P(\xi<8)$，$P(|\xi|<4)$.

【解】$P(\xi>-1.5)=0.5478$，$P(\xi<8)=0.988$，$P(|\xi|<4)=0.668$.

10．设随机变量ξ服从$N(0,1)$,求a值，分别使（1）$P(|\xi|<a)=0.975$，（2）$P(\xi>-a)=0.975$，（3）$P(\xi<a)=0.975$.

【答案】（1）$a=2.24$，（2）$a=1.96$，（3）$a=1.96$.

11．设随机变量ξ的概率分布密度为

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},$$

求（1）随机变量ξ的分布函数$F(x)$；（2）$P(a\le\xi\le b)$，$P(\xi\ge a)$，$P(\xi\le b)$，其中$a<0,b>0$.

【解】（1）$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x\le 0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x>0\end{cases}$,

（2）$P(a\le\xi\le b)=1-\frac{1}{2}e^{-b}-\frac{1}{2}e^{a}$，$P(\xi\ge a)=1-\frac{1}{2}e^{a}$，$P(\xi\le b)=1-\frac{1}{2}e^{-b}$.

12．设某商品的月销售量服从参数为 7 的*Poisson*分布,．问在月初商店要进货多少此商品，才能保证当月不脱销的概率为 0.999.

【解】 不脱销表示商店到月末还有货. 设月销售量为ξ因此问题是求 k ,使$P(\xi>k)\le 0.001$, 即$P(\xi\le k)\ge 0.999$, 计算$\lambda=7$的*Poisson*分布值,
$P(\xi\ge 16)=0.002407$, $P(\xi>16)=0.000958$, $P(\xi=16)=0.001448>0.001$,
$P(\xi=17)=0.000596<0.001$, 因此$k=17$, 月初的最少进货应该是$k-1=16$个单位.

13．设某地在任何长为t(周)的时间内发生地震的次数$n(t)$服从参数为λt的*Poisson*分布．(1) 若T表示直到下一次地震发生所需的时间(周)，求T的概率分布．(2) 求相邻三周内至少发生 3 次地震的概率．(3) 在连续 8 周无地震的情况下，下 8 周仍无地震的概率’

【解】 $P(n(t)=k)=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-kt}$.表示在$t$时间间隔内发生$k$次地震.

(1) $P(T\ge t)=P(n(t)=0)=e^{-\lambda t}$, 它表示在$t$时间间隔内不发生地震的概率，于是$T$的分布函数$F(t)$： $t\le 0$时, $F(t)=0$； $t>0$时， $F(t)=P(T<t)=1-P(T\ge t)$ $=1-e^{-\lambda t}$. 即$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$，即$T$服从参数为$\lambda$的指数分布;

这表明 Poisson 过程的来到间隔服从指数分布;

(2) 相邻三周内至少发生 3 次地震，即在 3 周时间内发生三次以上地震

$$P(n(3)\ge 3)=1-P(n(3)<3)$$
$$=1-P(n(3)=0)-P(n(3)=1)-P(n(3)=2)$$
$$=1-e^{3\lambda}-3\lambda e^{-3\lambda}-\frac{9\lambda^2e^{-2\lambda}}{2}=1-(1+3\lambda+\frac{9}{2}\lambda^2)e^{-3\lambda};$$

(3) $P("t\ge 16"|"T\ge 8")=\dfrac{P("T\ge 16"\cdot"T\ge 8")}{P("T\ge 8")}=\dfrac{P("T\ge 16"\cdot)}{P("T\ge 8")}=\dfrac{e^{-16\lambda}}{e^{-8\lambda}}=e^{-8\lambda}$.

这说明指数分布具有无记忆性.

14．设有 800 万个质点独立地散布在容积为 2 千立方米的一个水池中，每一个质点在水池各处是等可能的．求从这个水池中任取的 1 升（0.001 立方米）水中含有质点个数ξ的分布密度.

【解】 在一升水中平均有质点$\dfrac{8{,}000{,}000}{2{,}000\times 1{,}000}=4$即$np=\lambda=4$，

或解：一个质点落在 1 升水中的概率是$p=\dfrac{1}{2{,}000{,}000}$，8,000,000 个质点相当于 8,000,000 次 Bernoulli 试验，于是 1 升水中含有质点数ξ,服从的分布

$$p_k=C_{8000000}^k p^k(1-p)^{8000000-k}\approx\frac{(np)^k}{k!}e^{-np}=\frac{4^k}{k!}e^{-4}$$

15．某射手有 6 发子弹，命中率为 0.85， 如果命中了，就停止射击，如果不命中，就一直射下去，直到子弹用完为止．求耗用子弹数ξ的分布律.

【答案】
ξ	1	2	3	4	5	6
p_k	p	pq	pq^2	pq^3	pq^4	q^5

， 其中 $p=0.85$， $q=0.15$.

16．某市每天耗电量不超过一百万千瓦小时，该市每天的耗电率(天耗电量/百万千瓦小时）ξ的密度函数是

$$\varphi(x)=\begin{cases}12x(1-x)^2, & x\in(0,1],\\ 0, & x\notin(0,1].\end{cases}$$

如果该市发电厂每天供电量为 80 万千瓦小时，则任一天供电量不够需要的概率是多少?

【解】 $P(\xi>0.8)=1-P(\xi\le 0.8)=1-\int_0^{0.8}12x(1-x)^2dx=0.0272$.

17．某仪器装有三只独立工作的同型号电子元件，其寿命(小时)都服从同一指数分布，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{600}e^{-\frac{1}{600}x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

试求在仪器使用的最初 200 小时内，至少有一只电子元件损坏的概率。

【解】 先计算最初 200 小时内电子元件损坏的概率， $p_0=\int_0^{200}\dfrac{1}{600}e^{-\frac{1}{600}x}dx$

$=1-e^{-\frac{1}{3}}\approx 0.2835$，再计算三只元件至少有一只电子元件损坏的概率

$p=1-(1-p_0)^3=1-\dfrac{1}{e}=0.6321$.

18． 某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩(百分制)近似服从正态分布，平均成绩为 72 分，96 分以上的占考生总数的 2.3%。试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率

【解】 因为 $\varphi(2)=0.977$，$1-P\left(\dfrac{x-72}{\sigma}<\dfrac{96-72}{\sigma}\right)=0.023=1-0.977=1-\varphi(2)$，于是 $\dfrac{24}{\sigma}=2$, $\sigma=12$， 因此 $P\left(\dfrac{60-72}{12}<x<\dfrac{84-72}{12}\right)=2\varphi(1)-1=0.682$.

19． 向直线上掷随机点，已知随机点落入 $H_1=(-\infty,0)$， $H_2=[0,1)$ 和 $H_3=[1,\infty)$ 的概率分别等于 0.2，0.5 和 0.3，并且随机点在(0，1]上分布是均匀

的，假设随机点落入$(-\infty,0)$得 0 分，落入$[1,\infty)$得 1 分，落在区间$[0,1)$的 x 点得 x 分，以ξ表示得分，试求ξ的分布函数.

【解】 $P(H_1)=0.2, P(H_2)=0.5, P(H_3)=0.3,\ P(\xi<x\mid H_1)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1 & x>0\end{cases}$,

$P(\xi<x\mid H_2)=\begin{cases}0 & x<0\\ x & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$, $P(\xi<x\mid H_3)=\begin{cases}0 & x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$, 由全概率公式得

$$F(x)=P(\xi<x)==\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(X<x\mid H_i)=\begin{cases}0 & -\infty<x<0\\ 0.2+0.5x & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

20．设有一均匀陀螺，在其圆周的半圈上都表明刻度 1，另外半圈上均匀地刻上区间[0，1)上的诸数字，旋转这陀螺，求停下时其圆周上触及桌面上的点的刻度ξ的分布函数.

【解】 记“落在刻度 1 的半圈上”的事件为H_1，“落在另外半圈上均匀地刻度”的事件为H_2，则$P(H_1)=\frac{1}{2}$，$P(H_2)=\frac{1}{2}$，

$$P(\xi<x\mid H_1)=\begin{cases}1, & x\ge 1\\ 0, & x<1\end{cases},\quad P(\xi<x\mid H_2)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases},$$

利用全概率公式得到

$$F(x)=P(\xi<x)=\sum_{k=1}^{2}P(H_k)P(\xi<x\mid H_k)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x}{2}, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

可以看到此分布的随机变量既不是离散型的，也不是连续型的.

《高等数学》习题参考资料

第十一章　　概　率　论

§ 4　二维随机变量

习　　题

1．设随机变量ξ,η相互独立，且有下列分布律：

$\xi=x_k$	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$		$\eta=y_k$	$\frac{1}{2}$	1	3
$P(\xi=x_k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$		$P(\eta=y_k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

求(ξ,η)的联合分布律.

【答案】

$\xi\backslash\eta$	1/2	1	3	p_{i*}
-2	1/8	1/16	1/16	1/4
-1`	1/6	1/12	1/12	1/3
0	1/24	1/48	1/48	1/12
1/2	1/6	1/12	1/12	1/3
p_{*j}	1/2	1/4	1/4	1

2．设随机变量ξ,η相互独立，且有下列分布律：

$\xi\backslash\eta$	y_1	y_2	y_3
x_1	a	$\frac{1}{8}$	c
x_2	$\frac{1}{8}$	b	$\frac{1}{4}$

求值a,b,c.

【答案】 $a=1/24;b=3/8;c=1/12.\ a+b+c=\frac{1}{2}$,

$\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+b\right)\left(\frac{1}{4}+c\right)=\frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+b\right)\left(\frac{1}{8}+a\right)=\frac{1}{8}$, $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+b\right)\left(\frac{1}{8}+b\right)=b$,

$\left(\frac{1}{8}+a+c\right)\left(\frac{1}{4}+c\right)=c$, $\left(\frac{1}{8}+a+c\right)\left(\frac{1}{8}+b\right)=\frac{1}{8}$, $\left(\frac{1}{8}+a+c\right)\left(\frac{1}{8}+a\right)=a$,

于是$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}+c\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}+a\right)$, $c=2a$,

由于$\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+b\right)\left(\frac{1}{8}+b\right)=b$，得$b^2-\frac{1}{2}b+\frac{3}{64}=0$,于是$b=\frac{3}{8},\frac{1}{8}$,

当 $b=\frac{3}{8}$，则$a=\frac{1}{24}$, $c=\frac{1}{12}$,

当 $b=\frac{1}{8}$，则 $a=\frac{1}{8}$， $c=\frac{1}{4}$..

3．设两维连续型随机变量 (ξ,η) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C+\arctan\frac{y}{3})\text{，}$$

求 （1） 系数 A,B,C ； （2） (ξ,η) 的联合密度函数； （3） 边缘分布函数和边缘分布密度函数； （4）随机变量 ξ,η 是否相互独立。

【解】 （1） $F(-\infty,y)=0$, $F(x,-\infty)=0$ $F(+\infty,+\infty)=1$，则

$A(B-\frac{\pi}{2})(C+\arctan\frac{y}{2})=0$， $A(B+\arctan\frac{x}{2})(C-\frac{\pi}{2})=0$， $A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1$，于是 $B=C=\frac{\pi}{2}$，因此 $A=\frac{1}{\pi^2}$，

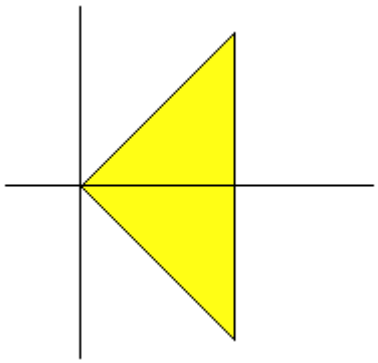
（2） $\varphi(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{6}{\pi^2}\frac{1}{x^2+4}\frac{1}{y^2+9}$；

（3） $F_\xi(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)$， $\varphi_\xi(x)=\frac{dF_\xi(x)}{dx}=\frac{2}{\pi(x^2+4)}$ ，

$F_\eta(y)=F(+\infty,y)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{2}\right)$， $\varphi_\eta(y)=\frac{dF_\eta(y)}{dy}$ ， $=\frac{3}{\pi(x^2+9)}$.

（4） $\varphi(x,y)=\varphi_\xi(x)\varphi_\eta(y)$，因此随机变量 ξ,η 相互独立.

4．设 D 为由 $0<x<1$， $|y|<x$ 所围成的区域，求服从 D 上均匀分布的二维随机变量 (ξ,η) 的分布密度， 并分别写出关于 ξ 及关于 η 的边缘分布密度函数.



【解】 $\varphi(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,|y|<x\\ 0, & other\end{cases}$

$\varphi_\xi(x)=\begin{cases}2x, & 0<x\le 1\\ 0 & other\end{cases}$， .

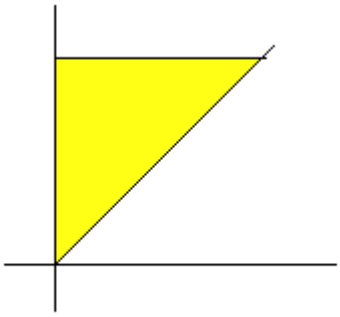
5．设随机变量（ξ,η）的分布密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} c(1-y), & 0\le x\le y\le 1,\\ 0, & x,y\text{的其余值,}\end{cases}$$

求c的值并求$P(\eta>2\xi)$.

【解】$1=\int_0^1 dx\int_x^1 c(1-y)dy=\frac{c}{6}$，于是$c=6$.，$P(\eta>2\xi)=6\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{2x}^1(1-y)dy=\frac{1}{2}$.

6．设随机变量ξ和η都服从$[0,1]$上的均匀分布，且ξ与η是相互独立的，试求$\xi^2+\eta^2\le 1$的概率.



【答案】$p=\frac{\pi}{4}$，（面积之比）

7．设随机变量（ξ,η）的分布密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} x^2+\frac{xy}{3}, & 0\le x\le 1,0\le y\le 2,\\ 0, & x,y\text{的其余值,}\end{cases}$$

求$P(\eta+\xi\ge 1)$.

【解】 $p=\int_0^1 dx\int_{1-x}^2\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dy=\int_0^1\left(\frac{x}{2}+\frac{4x^2}{4}+\frac{5x^3}{6}\right)dx=\frac{65}{72}$.

8．设ξ和η是两个连续型随机变量，其联合分布密度为

$$\varphi(x,y)=Ae^{-ax^2+bxy-cy^2}$$

问在什么条件下，随机变量ξ和η是相互独立的.

【解】$\iint_{R^2}\varphi(x,y)dxdy=1$，得$A=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2\pi}$，$ac-b^2>0$，

$$\varphi_\xi(x)=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2\sqrt{\pi c}}e^{-\frac{4ac-b^2}{4c}x^2},\ \varphi_\eta(y)=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{4ac-b^2}{4a}y^2}$$

$$\varphi_\xi(x)\varphi_\eta(y)=\frac{4ac-b^2}{4\sqrt{ac}\pi}e^{-\frac{4ac-b^2}{4ac}(ax^2+cy^2)},$$

于是，当$b=0$时随机变量ξ和η是相互独立的。

9．设随机变量ξ的分布律是

ξ	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2^n}$	$\cdots$

求设随机变量$\eta=\sin\frac{\pi}{2}\xi$的分布律

【解】 $\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}-1, & n=4k-1\\ 0, & n=2k\\ 1, & n=4k-3\end{cases}$，于是

$P(\eta=1)=\sum_{k=1}^{\infty}P(\xi=4k-3)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4k-3}}=8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{16^k}=8\times\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{8}{15}$，类似有

$P(\eta=-1)=\sum_{k=1}^{\infty}P(\xi=4k-3)=2\times\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{2}{15}$，$P(\eta=0)=\frac{1}{3}$，分布为

η	-1	0	1
$P(\eta=k)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$

10．分子运动速度的绝对值ξ是服从*Maxwell*分布的随机变量，其密度函数为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad \alpha>0$$

求分子动能$\eta=\frac{1}{2}m\xi^2$的密度函数，其中m是质量.

【答案】$\varphi_\eta(y)=\begin{cases}\frac{4}{a^3m}\sqrt{\frac{2y}{m\pi}}e^{-\frac{x^2}{a^2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

11．设随机变量ξ的密度函数为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\left(1+x^2\right)}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

求随机变量$\eta=\ln\xi$的密度函数.

【解】 $\eta<y$即$\ln\xi<y$，$\xi<e^y$，$F_\eta(y)=P(\eta<y)=P(\xi<e^y)=\int_{-\infty}^{e^y}\frac{2}{\pi(1+x^2)}dx$，

$\varphi_\eta(y)=\frac{dF_\eta(y)}{dy}=\frac{2e^y}{\pi(1+e^{2y})}$，$-\infty<y<+\infty$.

12． 设随机变量ξ的密度函数为

$$\varphi(x)=\begin{cases}2x^3e^{-x^2}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

求随机变量$\eta=\xi^2$的密度函数.

【解】 $\varphi_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ ye^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0\end{cases}$

13．设随机变量ξ服从标准正态分布$N(0,1)$，求$\eta=|\xi|$的分布.

【答案】 $\varphi_\eta(y)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

14．已知随机变量ξ,η的联合分布为

(x,y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(2,0)$	$(0,2)$
$P(\xi=x,\eta=y)$	0.1	0.15	0.2	0.25	0.15	0.15

求关于ξ的边缘分布；求$\xi+\eta$的概率分布.

【答案】

$\xi+\eta$	0	1	2
p	0.1	0.4	0.5

15．设随机变量ξ,η相互独立，且服从同一正态分布$N(0,\sigma^2)$，求随机变量$\varsigma=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$的分布.

【解】 二维随机变量(ξ,η)的联合分布密度函数是$p(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$，随机变量$\varsigma=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$的分布函数，当$z\le 0$时，$F(z)=0$；当$z>0$时，

$$F(z)=P(\varsigma<z)=P(\xi^2+\eta^2<z^2)$$

$$=\iint\limits_{r<z}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy=\iint\limits_{r<z}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}rdr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}d\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)=e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^z=1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}.$$

$$\varphi_\varsigma(z)=\frac{dF(z)}{dz}=\begin{cases}0 & z\le 0\\ \dfrac{z}{2\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} & z>0\end{cases}$$

16．在线段$[0,a]\ (a>0)$上随机地投掷两点，试求这两点之间的距离这个随机变量的分布函数.

【解】 设A,B两点到O的距离为随机变量ξ,η，于是他们都服从均匀分布，二维随机变量(ξ,η)的联合分布密度函数是$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}, & 0\le x\le a,0\le y\le a\\ 0, & other\end{cases}$，现在计算$\varsigma=|\xi-\eta|$的分布函数$F(z)$．当$z\le 0$时，$F_\varsigma(z)=0$；当$0<\varsigma\le a$时，$P(|\xi-\eta|<z)=\iint\limits_{|x-y|<z}\frac{1}{a^2}dxdy=\frac{a^2-(a-z)^2}{a^2}$；$z>a$时，$F(z)=P(\varsigma<z)=1$,于是

$$F_\varsigma(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \dfrac{a^2-(a-z)^2}{a^2}, & 0<z\le a\\ 1, & z>a\end{cases},$$

密度函数

$$p(z)=\begin{cases}\dfrac{2a-2z}{a^2}, & 0<z<a\\ 0, & other\end{cases}.$$

17．设ξ和η是两个相互独立的连续型随机变量，其分布函数分别为$F_\xi(x)$和$F_\eta(y)$，求随机变量$\tau=\max(\xi,\eta)$和$\nu=\min(\xi,\eta)$的分布函数．

【解】 $P(\tau<u)=P(\max(\xi,\eta)<u)$

$$=P(\xi<u,\eta<u)=P(\xi<u)P(\eta<u)$$

$$=F_\xi(u)\ F_\eta(u)$$

$$P(\nu<v)=1-P(\nu\ge v)$$

$$=1-P(\xi\ge v,\eta\ge v)=1-P(\xi\ge v)P(\eta\ge v)$$

$$=1-(1-P(\xi<v))(1-P(\eta<v))$$

$$=1-(1-F_\xi(v))(1-F_\eta(v)).$$

《高等数学》习题参考资料

第十一章　　概　率　论

§ 5　随机变量的数字特征

习　　题

1．设随机变量ξ具有分布

$$P(\xi=k)=\frac{1}{2^k},\qquad k=1,2,\cdots,$$

求 $E\xi$和$D\xi$．

【解】 $E\xi=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\dfrac{1}{2^k}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=2$，$E\xi^2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2\dfrac{1}{2^k}=6$，$D\xi=2$.

2．从数字$0,1,\cdots,n$中任取两个不同的数字，求这两个数字差的数学期望．

【解】本题应理解”数字差”为”差的绝对值”．两个数字差的绝对值的数学期望则计算如下．记ξ为两个数字差的绝对值，

$$P(\xi=k)=\frac{n-k+1}{C_{n+1}^{2}},$$

$$E\xi=\sum_{k=1}^{n}k\frac{n-k+1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}\left[(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^{2}\right]$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\left[\frac{n}{2}(n+1)^{2}-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]=\frac{1}{3}(n+2),$$

$$E\xi=\frac{n+2}{3}.$$

3．设随机变量ξ具有下列分布密度，求$E\xi$和$D\xi$．

（1） $\varphi(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$；

（2） $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{3}{11}(4x-x^{2}), & 1<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$；

（3） $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\cos^{2}x, & |x|\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$

【解】（1） $E\xi=1$，$D\xi=1$；（2） $E\xi=\frac{67}{44}$，$D\xi=\frac{787}{9680}$；

（3） $E\xi=0$，$D\xi=\frac{\pi^{2}}{12}-\frac{1}{2}$．

4．设随机变量ξ的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0\le x\le\pi/2\\ 1, & x>\pi/2\end{cases}$．求$E\xi$和$D\xi$．

【解】 $E\xi = \frac{\pi}{2} - 1,\ D\xi = \pi - 3.$

5．证明：当 $K = E\xi$ 时，$E(\xi - K)^2$ 最小．

【提示】 $\frac{\partial E(\xi - K)^2}{\partial K} = -2E\xi + 2K = 0.$

6．设地铁运行的间隔是 2 分钟，一旅客在任意时刻进入地铁站台，求候车时间的数学期望和方差．

【解】 $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le x < 2 \\ 0, & other \end{cases}$，$E\xi = \int_0^2 x\frac{1}{2}dx = \left.\frac{x^2}{4}\right|_0^2 = 1,$

$$E(\xi^2) = \int_0^2 x^2\frac{1}{2}dx = \frac{4}{3},\ D\xi = E(\xi^2) - (E\xi)^2 = \frac{1}{3}.$$

7． 一批零件有 9 个正品，3 个废品，从中 任意取一个，若取出废品不再放回，求在取得正品之前已取出废品数的数学期望和方差．

【解】
$$\begin{array}{cccccc} \xi & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & \frac{9}{12} & \frac{3}{12}\frac{9}{11} & \frac{3}{12}\frac{2}{11}\frac{9}{10} & \frac{3}{12}\frac{2}{11}\frac{1}{10} \end{array},$$

$$E\xi = \frac{3}{10},\ E\xi^2 = \frac{9}{22},\quad D\xi = \frac{9}{22} - \frac{9}{100} = \frac{351}{1100}.$$

8．设随机变量 ξ 和 η 是两个独立且具有同一分布，若 ξ 的分布律为 $P(\xi = i) = 1/3$，$i = 1,2,3$，设 $X = \min(\xi, \eta)$ 求 X 的分布律和 EX ．

【解】
$$\begin{array}{cccccc} \xi \backslash \eta & 1 & 2 & 3 & p_{i*} \\ 1 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/3 \\ 2 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/3 \\ 3 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 1/3 \\ p_{*j} & 1/3 & 1/3 & 1/3 & \end{array},\qquad \begin{array}{cccc} \xi & 1 & 2 & 3 \\ p & 5/9 & 1/3 & 1/9 \end{array},\quad EX = \frac{14}{9}.$$

9．设随机变量（ξ,η）的分布密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} c(1-y), & 0\le x\le y\le 1,\\ 0, & x,y\text{的其余值,}\end{cases}$$

求概率 $P(\xi+\eta\le 1)$ 及 $Z=2\xi+1$ 的方差 $D(Z)$

【解】 $P(\xi+\eta\le 1)=\dfrac{3}{4}$；$D(z)=\dfrac{3}{20}$

10．设随机变量 ξ 和 η 在圆域 $x^2+y^2\le R^2$ 上服从联合均匀分布．求 ξ 和 η 的相关系数 ρ；问 ξ 和 η 是否独立?

【解】 $E(\xi\eta)=\iint_{x^2+y^2\le R^2} xy\,dxdy=0$，$E\xi=\dfrac{1}{\pi R^2}\int_{-R}^{R}x\,dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}dy=0$，$E\eta=0$，于是 $\rho=0$；但不独立．事实上 $\varphi_\xi(x)=\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\dfrac{1}{2\pi}dy=\dfrac{\sqrt{R^2-x^2}}{\pi}$，$\varphi_\eta(y)=\dfrac{\sqrt{R^2-y^2}}{\pi}$，显然 $\varphi(x,y)\ne\varphi_\xi(x)\varphi_\eta(y)$．

11．设随机变量 ξ 和 η 相互独立，都服从 $N(0,1)$ 分布，证明：$E\big(\max(\xi,\eta)\big)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$．

【 提示】 $\max(\xi,\eta)=\dfrac{1}{2}(\xi+\eta+|\xi-\eta|)$，$\xi-\eta\sim N(0,2)$，

$E(|\xi-\eta|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|e^{-\frac{z^2}{4}}dz=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$，于是 $E\big(\max(\xi,\eta)\big)\dfrac{1}{2}\left(0+\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$．

12．设某商店组织某商品货源．已知该商品的需求量 ξ（件）服从 $[2000,4000]$ 上的均匀分布， 如果每出售一件商品获利 3 元，如果销售不出去，每件需付保管费 1 元，问需组织多少货源，才能使商店的期望收益最大．

【解】 设组织货源 a 件, 销售量为 X , 利润为 z , 则 z 与 X , a 的关系是

$$Z(a)=f(X,a)=\begin{cases}3X-(a-X), & 2000<X<a<4000\\ 3a & 2000<a<X<4000\end{cases}$$

由于 $X \sim U[2000,4000]$，因此 $p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2000}, & 2000<x<4000\\ 0, & other\end{cases}$，于是

$$Ef(x)=\int_{2000}^{4000}\frac{1}{2000}f(x)dx=\int_{2000}^{a}\frac{1}{2000}(4x-a)dx+\int_{a}^{4000}\frac{1}{2000}3adx$$

$$=\frac{1}{2000}(-2a^2+14000a-2\times 2000^2)$$，欲使 $Ef(x,a)$ 最大，则 $\dfrac{dEf(x,a)}{da}=0$，$a=3500$，

易验证此时利润最大. 最大利润为8250元.

13．设随机变量 ξ 的密度函数是 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & |x|\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

求 $E(\sin\xi)$ 和 $D(\sin\xi)$.

【解】 $E(\sin\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\varphi(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin x\frac{2}{\pi}\cos^2 xdx=0$,

$$D(\sin\xi)=E(\sin^2\xi)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\frac{2}{\pi}\cos^2 xdx=\frac{1}{4}.$$

14． n 把钥匙中只有一把能打开房门，现随机逐把试用这 n 把钥匙开门，求首次打开房门的试用次数 ξ 的数学期望和方差．分别考虑以下两种情况．（1）不放回试用；（2）有放回试用．

【解】(1) 有放回试用时 $P(\xi=k)=\dfrac{1}{n}$，概率分布是

ξ	1	…	k	…	n
p	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$

$$E\xi=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2};\quad E\xi^2=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6},\ D\xi=\frac{n^2-1}{12}.$$

(2) 概率分布是

ξ	1	…	k	…	n
p	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n^k}$	…	$\frac{1}{n^n}$

$$E\xi=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{1}{n^k}=\frac{n-\dfrac{1}{n^{n-2}}}{(n-1)^2}.$$

$$E\xi^2=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot\frac{1}{n^k}=\frac{n(1+n-n^{-n}-n^{3-n})}{(n-1)^3}$$

$$D\xi=\frac{n(1+n-n^{-n}-n^{3-n})}{(n-1)^3}-\frac{\left(n-\frac{1}{n^{n-2}}\right)^2}{(n-1)^4}.$$

15．设随机变量(ξ,η)服从区域$D=\{(\xi,\eta)\mid 0<\xi<1,0<\eta<1\}$上的均匀分布，求相关系数$\rho_{\xi\eta}$．

【解】 $\varphi(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x,y<1\\ 0, & other\end{cases}$，$E\xi=\int_0^1\int_0^1 xdxdy=\frac{1}{2}$，$E\eta=\int_0^1\int_0^1 ydxdy=\frac{1}{2}$，

$E(\xi\eta)=\int_0^1\int_0^1 xydxdy=\frac{1}{4}$，$COV(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E\xi\cdot E\eta=0$，$D\xi\neq 0$，$D\eta\neq 0$，于是

$\rho_{\xi\eta}=0$.

16．设随机变量$\xi\sim N(0.1)$，求随机变量$\eta=\xi^n$（n为正整数）与ξ的协方差与相关系数.

【解】 $COV(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-E\xi\cdot E\eta$，

$E(\xi\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^{n+1}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$，当$n$使偶数时，$E(\xi\eta)=0$，当$n$是奇数时，

$$E(\xi\eta)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}x^{n+1}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}(2u)^{\frac{n}{2}}e^{-u}du=2^{\frac{n+1}{2}}\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)=n!!.$$

类似有$E\eta=\begin{cases}0, & n\ \text{is odd}\\ (n-1)!!, & n\ \text{is even}\end{cases}$，$E\eta^2\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=(2n-1)!!$，

$D\eta=E(\eta^2)-(E\eta)^2=\begin{cases}(2n-1)!!, & n\ \text{is odd}\\ (2n-1)!!-[(n-1)!!]^2, & n\ \text{is even}\end{cases}$，$E\xi=0$，$D\xi=1$，于是

$$COV(\xi,\eta)=\begin{cases}n!!, & n\ \text{is odd}\\ 0, & n\ \text{is even}\end{cases},$$

$$\rho_{\xi\eta}=\frac{COV(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}=\begin{cases}\dfrac{n!!}{\sqrt{(2n-1)!!}}, & n \text{ is odd}\\ 0, & n \text{ is even}\end{cases}$$

17．设随机向量(ξ,η)的联合概率密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}k\cos(x+y), & 0\le x\le\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\le y\le 0\\ 0, & other\end{cases},$$

求ξ,η的期望与均方差，协方差与相关系数.

【解】 $k=\dfrac{1}{2}$， $E\xi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{2}\cos(x+y)dy=\dfrac{\pi}{4}$，

$E\xi^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{2}\cos(x+y)dy=\dfrac{\pi^2}{8}+\dfrac{\pi}{2}-2$， $D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{\pi}{2}-2$

$E\eta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}ydx\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{2}\cos(x+y)dy=-\dfrac{\pi}{4}$， $E\eta^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^2dx\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{2}\cos(x+y)dy=\dfrac{\pi^2}{8}+\dfrac{\pi}{2}-2$，

$D\eta=E\eta^2-(E\eta)^2=\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{\pi}{2}-2$，$E(\xi\eta)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xydx\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{2}\cos(x+y)dy=-\dfrac{\pi^2}{8}+\dfrac{\pi}{2}-1$，

$COV(\xi,\eta):=E(\xi\eta)-E\xi\cdot E\eta=-\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{\pi}{2}-1$， $\rho_{\xi\eta}=\dfrac{-\pi^2+8\pi-16}{\pi^2+8\pi-32}\approx -0.2454$.

18．设设随机向量(ξ,η)的协方差矩阵为$\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 9\end{pmatrix}$，求$\xi,\eta$的相关系数.

【解】 $D\xi=4$， $D\eta=9$， $COV(\xi,\eta)=-3$， $\rho=\dfrac{-3}{\sqrt{4}\sqrt{9}}=-\dfrac{1}{2}$.

19． 设随机变量 ξ和 η 是相互独立的，证明$D(\xi\eta)\ge D\xi\cdot D\eta$

【解】

$$D(\xi,\eta)-D\xi D\eta=\left(E(\xi\eta)^2-(E(\xi\eta))^2\right)-\left(E\xi^2-(E\xi)^2\right)\left(E\eta^2-(E\eta)^2\right)$$
$$=E\xi^2E\eta^2-(E\xi)^2(E\eta)^2-\left(E\xi^2E\eta^2-(E\xi)^2E\eta^2-E\xi^2(E\eta)^2+(E\xi)^2(E\eta)^2\right)$$
$$=E\xi^2(E\eta)^2-(E\xi)^2(E\eta)^2+(E\xi)^2E\eta^2-(E\xi)^2(E\eta)^2=(D\xi)(E\eta)^2+(E\xi)^2(D\eta)\ge 0.$$

20．设 A 和 B 是两个正概率随机事件，随机变量 $\xi=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases}$，

$\eta=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$，证明 ξ 和 η 相互独立等价于 ξ 和 η 不相关．

【解】　他们的分布为

$$\begin{array}{cccc}\xi & 0 & 1\\ p & 1-p(A) & p(A)\end{array}，\quad \begin{array}{cccc}\eta & 0 & 1\\ p & 1-p(B) & p(B)\end{array}，\quad \begin{array}{cccc}\xi\eta & 0 & 1\\ p & 1-p(AB) & p(AB)\end{array}.$$

于是 $E\xi=p(A)$，$E\eta=p(B)$，$E(\xi\eta)=p(AB)$．

若不相关，$\rho=0$，于是 $E(\xi\eta)=(E\xi)(E\eta)$，即 $p(AB)=p(A)p(B)$，所以 A,B 相互独立．因此 $A,\overline{B}$，$\overline{A},B$，$\overline{A},\overline{B}$ 也都相互独立，于是

$p(\xi=0,\eta=0)=p(\overline{A}\cdot\overline{B})=p(\overline{A})p(\overline{B})=p(\xi=0)p(\eta=0)$，类似有

$p(\xi=0,\eta=1)=p(\overline{A}\cdot B)=p(\overline{A})p(B)=p(\xi=0)p(\eta=1)$，

$p(\xi=1,\eta=0)=p(A\cdot\overline{B})=p(A)p(\overline{B})=p(\xi=1)p(\eta=0)$，

$p(\xi=1,\eta=1)=p(A\cdot B)=p(A)p(B)=p(\xi=1)p(\eta=1)$，因此 $\xi,\ \eta$ 相互独立

§ 6 大数定律和中心极限定理

习　　题

1．某厂生产一种产品，次品率为 0.1，求送来的 200 件产品中次品不超过 15 件的概率，并用中心极限定理估算这个概率的近似值．

【解】 $P(\xi=k)=C_{200}^{k}p^{k}q^{200-k}$，$P(\xi\le 16)=\sum_{k=0}^{16}C_{200}^{k}p^{k}q^{200-k}$；

$$P(\xi\le 16)=\Phi\left(\frac{16-200\times 0.1}{\sqrt{200\times 0.1\times 0.9}}\right)=1-\Phi(0.943)=0.174$$

2．设ξ为随机变量，$E|\xi|^r$存在，$r>0$．证明

对任意的$\varepsilon>0$有$P(|\xi|\geq\varepsilon)\leq\dfrac{E|\xi|^r}{\varepsilon^r}$．

【解】

$$E(|\xi|^r)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^r\varphi(x)dx\geq\int_{|x|\geq\varepsilon}|x|^r\varphi(x)dx\geq|\varepsilon|^r\int_{|x|\geq\varepsilon}\varphi(x)dx=|\varepsilon|^r\,P(|\xi|\geq\varepsilon)$$

3．某电视机厂每月生产电视 10000 台．但其显象管生产车间的产品正品率仅为 0.8．为了以 0.997 的概率保证出厂的电视机都能装上正品显象管，该车间每月应该生产多少只显象管?

【解】设每月生产n个显像管，$X_k=\begin{cases}1, & \text{第k个显像管为正品}\\ 0, & \text{第k个显像管为废品}\end{cases}$，$k=1,2,\cdots,n$,于是

$X_1,X_2,\ldots,X_n$相互独立，且$X_k\sim 0-1$分布,$P(X_k=1)=0.8$，$EX_k=0.8$，

$DX_k=0.16$，$X=\sum_{k=1}^{n}X_k\sim N(0.8n,0.16n)$，所求概率为

$P(X\geq 10000)\approx 1-\Phi\left(\dfrac{10000-0.8n}{\sqrt{n\times 0.8\times 0.2}}\right)=\Phi\left(\dfrac{0.8n-10000}{0.4\sqrt{n}}\right)=0.997$，查表得

$\dfrac{0.8n-10000}{0.4\sqrt{n}}=2.75$，即$0.8n-1.1\sqrt{n}-10000=0$，解得$n\approx 12655$，

该车间每月应该生产12655只显象管．

4．设某车间 200 台车床，每台车床由于种种原因出现停车，且每台车床开动的概率为 0.6，假定每台车床停车或开动是相互独立的．若每台车床开动时需要消耗一千瓦电能，问要以 99.9 % 以上的概率保证这个车间不致因供电不足而影响生产，需供应多少电能?

【解】设

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{第k台机床开动}\\ 0, & \text{第k台机床停机}\end{cases}，$$

$k=1,2,\cdots,200$，于是$X_1,X_2,\ldots,X_{200}$相互独立，且$X_k \sim 0-1$分布，$P(X_k=1)=0.6$，

$EX_k=0.6$，$DX_k=0.24$，$X=\sum_{k=1}^{200}X_k \sim N(0.6n,0.24n)$，所求概率为

$$P(0\le X\le \mathrm{n})\approx \Phi\left(\frac{n-120}{4\sqrt{3}}\right)-\Phi(-17.32)=0.999,$$

查表得$\frac{n-120}{4\sqrt{3}}=3.09$，解得$n\approx 142$．需供应电能142千瓦．

5．用Чебышев不等式确定：当掷一个均匀硬币时，需掷多少次，才能保证使得"正面"出现的频率在0.4至0.6的概率不小于0.9．

【解】 $P(|X-EX|<\varepsilon)\ge 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$

$X_i=\begin{cases}1, & \text{正面向上}\\ 0, & \text{反面向上}\end{cases}$，$X=\sum_{k=1}^{n}X_k$，$EX_i=0.5$，$DX_i=0.25$，$EX=0.5n$，

$DX=0.25n$，$P(|X-0.5n|\le 0.1n)\ge 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}=1-\frac{0.25n}{0.01n^2}=0.9$，$n=\frac{25}{0.1}=250$，

需掷250次．

若用中心极限定理解，则$Y=\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\sim N(0,1)$，

$P\left(-\frac{0.1n}{0.5\sqrt{n}}\le Y\le\frac{0.1n}{0.5\sqrt{n}}\right)=2\Phi_0\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)-1\ge 0.9$，$\Phi_0\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge 0.95=\Phi_0(1.645)$，

因此$\sqrt{n}\ge 5\times 1.645=8.225$，$n>68$，需掷68次即可．可见中心极限定理解比较精确．

6．某市煤气公司和保险公司推出事故意外保险．设投保人一年的保险费5元，如果在一年内投保人遭遇意外事故，公司赔费3万元．已知在一年内该市发生事故的概率是0.0001，如果该市有1000000户投保，(1)求保险公司亏本的概率；(2) 求保险公司年利润不少于2700000元的概率．

【解】设ξ是遭遇意外事故的户数，保险公司亏本，则$\xi \geq \frac{5\times 1000000}{30000} \approx 167$，

$n = 1000000$， $p = 0.0001$， $np = 100$， $\sqrt{npq} \approx 10$，

(1) $P(\xi \geq 167) = 1 - \Phi\left(\frac{167 - 1000000\times 0.0001}{\sqrt{1000000\times 0.0001\times 0.9999}}\right) = 1 - \Phi(6.7) \approx 0$；

(2) 保险公司年利润不少于 2700000，则$\xi < \frac{5000000 - 2700000}{30000} \approx 77$，

$$P(0 \leq \xi < 77) = \Phi\left(\frac{77 - 1000000\times 0.0001}{\sqrt{1000000\times 0.0001\times 0.9999}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 1000000\times 0.0001}{\sqrt{1000000\times 0.0001\times 0.9999}}\right)$$

$= \Phi(-2.3) \approx 0.011$.

7．一个复杂的系统，由 100 个互相独立起作用的部件所组成．在运行时，每一个部件损坏的概率为 0.1，为了使整个系统起作用，至少需要 90 个部件工作，求整个系统能工作的概率．

【解】设故障元件数为ξ， $\xi \sim B(100,0.1)$， $P(0 \leq \xi < 10) = \sum_{i=0}^{9} P(\xi = i)$，

$$E\xi = np = 100\times 0.1 = 10， \quad npq = 9，$$

$$P(0 \leq \xi < 10) = \Phi\left(\frac{10-10}{3}\right) - \Phi\left(\frac{0-10}{3}\right) = \Phi(0) - \Phi(-3.33) = 0.5$$

8．设某车间有 400 台同类型的机器，每台的电功率为Q瓦。设每台机器开动时间为总工作时间的$\frac{3}{4}$，且每台机器的开与停是相互独立的。为了保证以 0.99 的概率有足够的电力，问该车间至少要供应多大的电功率．

【解】设需供应k Q瓦电，由于 $\Phi(2.33) = 0.99$，于是$\Phi\left(\frac{k - 400\times\frac{3}{4}}{\sqrt{400\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}}\right) = 0.99$，

$\frac{k - 400\times\frac{3}{4}}{\sqrt{400\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}} = 2.33$， $k \approx 320.18$，即需供应$321Q$瓦功率的电．

9．一加法器同时收到 20 个噪声电压V_k $(k=1,2,\cdots,20)$．设它们是相互独立的随机变量，且都服从（0,10）上的均匀分布．记$V=\sum_{k=1}^{20}V_k$，求$V>105$的概率．

【解】 $EV_k=5$，$DV_k=\dfrac{100}{12}=\dfrac{25}{3}$，

$$V=\sum_{k=1}^{20}V_k \sim N\left(100,\frac{500}{3}\right)=1-\Phi\left(\frac{105-100}{\sqrt{\frac{500}{3}}}\right)$$

$$=1-\Phi(0.387)=1-0.6548=0.352\ .$$

10．设ξ为袋装茶叶每一袋的净重，已知$E(\xi)=100\,\mathrm{g}$，$\sqrt{D(\xi)}=10\,\mathrm{g}$，一大盒内有 200 袋，求一大盒的净重大于 20.4 kg 的概率．

【解】 $E\xi_i=100$，$\sigma^2=D\xi_i=10^2=100$，一大盒的平均净重$\overline{\xi}=\dfrac{1}{200}\sum_{i=1}^{200}\xi_i$，

$E\overline{\xi}=100$，$D\overline{\xi}=\dfrac{200\times D\xi_i}{200^2}=\dfrac{1}{2}$，于是$\eta=\dfrac{\overline{\xi}-E\overline{\xi}}{\sqrt{D\overline{\xi}}}\sim N(),1)$，得

$$P\left(\overline{\xi}>\frac{20400}{200}\right)=P(\overline{\xi}>102)=P\left(\frac{\overline{\xi}-E\overline{\xi}}{\sqrt{D\overline{\xi}}}>\frac{102-100}{\sqrt{0.5}}\right)$$

$$=P(\eta>2.828)=1-\Phi_0(2.828)=1-0.9977=0.0023\ .$$

11．某个单位设置一电话总机，共有 200 架分机，设每个电话分机有 5 % 的时间要使用外线通话，假定每个分机是否使用外线通话是相互独立的，问总机要多少外线才能以 90 %的概率保证每个分机要使用外线时可供使用．

【解】设 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{个分机要用外线}\\ 0, & \text{第}i\text{个分机不用外线}\end{cases}$，$P(X_i=1)=0.05$，

$EX_i=0.05, DX_i=0.95\times0.05$，设 X 为同时向总机要外线的分机台数，$X=\sum_{i=1}^{200}X_i$，

X 服从参数为 $(n,0.05)$ 的二项分布，又设总机有外线数 x，于是

$$P\left(\frac{X-200\times0.05}{\sqrt{200\times0.05\times0.95}}<\frac{x-200\times0.05}{\sqrt{200\times0.05\times0.95}}\right)=0.9,\quad \Phi\left(\frac{x-10}{\sqrt{9.5}}\right)=0.9,$$

$\frac{k-10}{\sqrt{9.5}}\approx0.128$，$x=10+3.08$，取 $x=14$ 就可以了，总机要14根外线才能以 90 % 的概率保证每个分机要使用外线时可供使用.

12．假设 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ 独立同分布，且已知 $E(\xi_i^k)=\alpha_k\ \ (k=1,2,3,4)$，证明当 n 充分大时，随机变量 $\eta_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$ 近似服从正态分布，并指出其分布中的参数.

【解】记 $\varsigma_i=\xi_i^2$，则 ς_i，$i=1,2,\ldots,n$ 独立同分布，

$E\varsigma_i=E\xi_i^2=\alpha_2$，$D\varsigma_i=E\varsigma_i^2-(E\varsigma_i)^2=E\xi_i^4-(E\varsigma_i)^2=\alpha_4-\alpha_2^2$，

于是根据中心极限定理，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\varsigma_i-E\left(\sum_{i=1}^{n}\varsigma_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n}\varsigma_i\right)}}<x\right)=\Phi(x),$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2-n\alpha_2}{\sqrt{n\left(\alpha_4-\alpha_2^2\right)}}<x\right)=\Phi(x),$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_n-\alpha_2}{\sqrt{\frac{1}{n}\left(\alpha_4-\alpha_2^2\right)}}<x\right)=\Phi(x)$$

所以当 n 充分大时，有 $\dfrac{\eta_n-\alpha_2}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\left(\alpha_4-\alpha_2^2\right)}}\sim N(0,1)$，或 $\eta_n\sim N\left(\alpha_2,\dfrac{1}{n}\left(\alpha_4-\alpha_2^2\right)\right)$.