《 高等数学下 》期末试卷

一、单项选择题（在每个小题的四个备选答案中选出一个正确答案，并将正确答案的序号填入题后的括号内。每小题 3 分，共 18 分。）

得分	

1. 广义积分 $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}dx=$（　　　　）

（A）∞　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$-\frac{1}{2}$　　（D）0

2. 函数 $z=f(x,y)$ 在 $(x_{0,}y_0)$ 点处可导是在 $(x_{0,}y_0)$ 处连续的（　　　　）条件

（A）充分　　（B）必要　　（C）充要　　（D）无关

3. 微分方程 $y''-y'=xe^x$ 的特解 $y^*=$（　　　　）

（A） Ae^x　　（B） $(ax+b)e^x$　　（C） $x(ax+b)e^x$　　（D） Ax^2e^x

4. 设 D 是矩形域： $0\le x\le 1$，$1\le y\le 2$，$\iint\limits_D(x+y)d\sigma=I_1$，$\iint\limits_D(x+y)^2d\sigma=I_2$，

$\iint\limits_D\sin(x+y)d\sigma=I_3$ 则（　　　　）

(A) $I_3<I_1\le I_2$　　(B) $I_3\le I_2<I_1$　　(C) $I_1\le I_2<I_3$　　(D) $I_2<I_3\le I_1$

5. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则下列级数中发散的是（　　　　）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+2)$　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}2u_n$　　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+2}$　　(D) $1+\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

6．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=3$ 时条件收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$　（　　　　）

(A) 发散　　(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛　　(D) 敛散性不能确定

二、填空题（每空 4 分，共 24 分）

得分	

1. 由曲线 $y=1-x^2$ 与 $y=x^2-1$ 轴所围成平面图形的面积为______________。

2. 微分方程 $xy'-y=1$ 的通解 $y(x)=$____________ 。

3. 设 D：{ $x^2+y^2\le 4$ } , 则 $\iint\limits_D(1+y)d\sigma=$ _____________。

4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，则 $f_y'(0,0)=$______________。

5. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的必要条件为______________。

6. 差分方程$y_{t+1}-y_t=2$的通解为______________。

三、**计算题（每小题 5 分，共 50 分）**

1. 求解方程$\begin{cases}y''+y'-6y=6e^{3x}\\ y(0)=1, y'(0)=4\end{cases}$。

得分	

2. 设$z=z(x,y)$是由方程$xy-z=e^z$确定，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

得分	

3. 求二元函数$z=xy+\dfrac{1}{x}+\dfrac{8}{y}$的极值。

得分	

4. 设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，且 f，φ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

得分	

5. 计算 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma$ ，其中 D 是由 $y=\frac{1}{x}, y=x, x=2$ 所围。

得分	

6. 计算 $\int_0^2 dx\int_x^2 \frac{\sin y}{y}dy$。

得分	

7. 计算 $\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)d\sigma$，其中 $D=\{x^2+y^2\le a^2\}$。

得分	

8.判别级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\tan\frac{\pi}{3^n}$是条件收敛还是绝对收敛。

得分	

9. 求级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)3^n}$ 的收敛半径和收敛区域。

得分	

10. 将函数 $y=\frac{1}{2+x}$ 展开为x的幂级数和$(x-2)$的幂级数。

得分	

四、**应用题（5 分）**

求由曲面$z=1-x^2-y^2$与xoy平面所围曲顶柱体的体积。

得分	

五、证明题（3 分）

得分	

设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n}{1+u_n}$收敛。

答案

一、单项选择题

1.B　2. D　3.C　4. A　5. A　6.C

二、填空题

1. $8/3$，　2. $Cx-1$，　3. 4π，　4. 0，　5. $\lim\limits_{n\to 0} u_n = 0$　6. $y_t = 2t + C$ 三、

计算题

1. 解：特征方程 $r^2 + r - 6 = 0, r_1 = 2, r_2 = -3$ ------------(1 分)

则齐次方程的通解为 $\overline{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$， ------------(2 分)

设特解为 $y^*(x) = Ae^{3x}$， ------------(3 分)

代入方程得到 $A = 1$ ， ------------(4 分)

代入初始条件，得到方程的特解为：$y = \frac{1}{5}e^{2x} - \frac{1}{5}e^{-3x} + e^{3x}$ ------------(5 分)

解：　对方程两边关于 x, y 同时求导 $3z^2 z_x' - 3yz - 3xyz_x' = 0$，

$z_x' = \dfrac{yz}{z^2 - xy}$，　$z_y' = \dfrac{xz}{z^2 - xy}$. -------------(2 分)

$dz = \dfrac{yz}{z^2 - xy}dx + \dfrac{xz}{z^2 - xy}dy$ -------------(5 分)

3. 解：　先解方程组$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = y - \dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} y = x - \dfrac{8}{y^2} \end{cases}$，得到 $x = 1/2, y = 4$（求导对加 1 分）------------(2 分)

$A = z_{xx} = \dfrac{2}{x^3} = 16, B = z_{xy} = 1, C = z_{yy} = 1/4$，$B^2 - AC = -3 < 0, A = 16 > 0$

极小值点 $(1/2, 4)$， ------------(4 分)

极小值为 $z(1/2, 4) = 6$ ------------(5 分)

4. 解：$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2} f(xy) + \dfrac{1}{x} f'(xy) y + y\varphi'(x+y)$ ------------(2 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\frac{1}{x^2} f(xy) + \frac{1}{x} f'(xy) y + \frac{y}{x} f''(xy) x + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y)$$

$$= yf''(xy) + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y)$$

------------(5 分)

5. 解：$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma=\int_1^2 x^2dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} y^2dy=\frac{9}{4}$ （二次积分对加 3 分，对一个积分加 1 分） -----(5 分)

6 解： $\int_0^2 dx\int_x^2\frac{\sin y}{y}dy=\int_0^2 dy\int_0^y\frac{\sin y}{y}dx=1-\cos 2$ ------------(5 分)（二次积分对加 3 分，对一个积分加 1 分）

7 解： $\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)d\sigma=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^a r\cdot\cos r^2dr=\pi\cdot\sin a^2$ ------------(5 分)

（二次积分对加 3 分，对一个积分加 1 分）

8 解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\tan\frac{\pi}{3^{n+1}}}{n\tan\frac{\pi}{3^n}}\right|=\frac{1}{3}<1$ ------------(3 分)

绝对收敛 ------------(5 分)

9 解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)3^n}{(n+2)3^{n+1}}\right|=\frac{1}{3}$， ------------(3 分)

$R=3, x=-3,$ 原级数收敛；$x=3,$ 级数发散。 -----对一个加 4 分

所以原级数的收敛区域为 $[-3,3)$ 。 ------------(5 分)

10 解：$y=\frac{1}{2+x}=\frac{1}{4+x-2}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x-2}{4}}=\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-2}{4})^n, |x-2|<4$ ----------(3 分)

$y=\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x}{2})^n, |x|<2$ ------------(5 分)

四、应用题

解：$V=\iint\limits_D[(1-x^2-y^2)d\sigma \quad =4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr=\frac{\pi}{2}$

（表达式对加 2 分，二次积分对加 2 分，结果对加 1 分）

五、证明题

证明： $\because u_n\geq 0$

$\therefore \frac{u_n}{1+u_n}\leq\frac{u_n}{1+0}=u_n$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{1+u_n}$ 收敛。